私の数学散歩道(28)　平成 28 年　6 月 5 日提出

幾分 難解な三角方程式について

数実研会員　村田　洋一

（作成の背景）

今回 下記の 3 題の方程式を考えました。とくに(1)は 遊び心で作ったもので 見掛けは簡単ですが、解くのは大変です。問題作成の鍵は「初めに解ありき」です。

θ や x の値を決めそれらの倍角や三倍角等、三角関数の種別と前後の符号などを考えて等式を設定します。従って このように作った方程式がいつも解けるとは限りません。

候補の中から選ばれたものが問題として提起される訳です。

（問　題）

(1)　$\sin 2\theta + \tan 3\theta - \cos 4\theta = 1$　（$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$）

(2)　$\tan x \tan(x + \dfrac{\pi}{6}) = 2\sin x$　（$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$）

(3)　$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$　（$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$）

（1）　$\sin 2\theta + \tan 3\theta - \cos 4\theta = 1$　（$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$）

左辺を $\tan\theta$ の方程式に直しその値を求め、次に $\sin 2\theta, \tan 3\theta, \cos 4\theta$ を計算、これらの結果をこの左辺に代入し解の妥当性をチェックする方針で臨みたい。

$\tan\theta = t$　として　$\sin 2\theta = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2t}{1+t^2}$　　$\cos 2\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\tan 3\theta = \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} = \frac{\tan\theta + \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1 - \dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \quad \cdots ①$$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = \dfrac{2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} - 1$　　これらを(1)の左辺に代入して

$\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{3t-t^3}{1-3t^2} - \dfrac{2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 0$　　ここで $t \neq \pm 1/\sqrt{3}$　　分母を払って

$2t(1+t^2)(1-3t^2) + (3t-t^3)(1+t^2)^2 - 2(1-t^2)^2(1-3t^2) = 0$　　整理して

$t^7 - 6t^6 + 5t^5 + 14t^4 - t^3 - 10t^2 - 5t + 2 = 0$　　左辺を $f(t)$ と置くと

$f(1)=0$，$f(-1)=0$ より 組立除法を二度用いて

$(t-1)(t+1)(t^5-6t^4+6t^3+8t^2+5t-2)=0$　・・・・②

ここで ②式第 3 項の因数分解（(注 1)参照）に当たっては $f(t)$ で $t=\pm 1$ 以外の解がないか ①式と併せ検討する。（$\tan 3\theta$ と $\tan\theta$ は関数関係にあるため。）

$t=1$ の時　$\tan 3\theta=\dfrac{3-1}{1-3}=-1$　従って $3t-t^3=3t^2-1$ から

$t^3+3t^2-3t-1=(t-1)(t^2+4t+1)=0$

$t=-1$ の時　$\tan 3\theta=\dfrac{-3+1}{1-3}=1$　$t^3-3t^2-3t+1=(t+1)(t^2-4t+1)=0$

②の第 3 項に因数があれば　t^2+4t+1，　t^2-4t+1　の可能性がある。
割り算を実行すると 後者が因数となりうまくいく。　従って ②式は

$(t-1)(t+1)(t^2-4t+1)(t^3-2t^2-3t-2)=0$　・・・・③

ここで ③の第 4 項＝$h(t)$ と置くと　$h'(t)=3t^2-4t-3=0$　から　$t=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$

2 解を $\alpha,\beta(\beta>\alpha)$ とすると　α で極大値、β で極小値をとり $f(\beta)<f(\alpha)<0$

従って　$h(t)=0$　((注)-2 参照) は 1 個の実数解を持つ。
これを「ニュートンの逐次近似法」で求めてみよう。$h(2)=-8<0$、$h(3)=-2<0$
$h(4)=18>0$ から近似解　$\alpha_0=3$ として $h(3)=-2$　$h'(3)=12$

従って　$\alpha_1=\alpha_0-\dfrac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}=3-\dfrac{(-2)}{12}=\dfrac{19}{6}$　$h(\dfrac{19}{6})=\dfrac{6859}{216}-\dfrac{722}{36}-\dfrac{57}{6}-2=0.1991$

$h'(\dfrac{19}{6})=\dfrac{1083}{36}-\dfrac{76}{6}-3=14.4167$　$\alpha_2=\dfrac{19}{6}-\dfrac{0.1991}{14.4167}=3.1528$　以下計算を略し

$h(3.1528)=0.0006$　$h'(3.1528)=14.2092$　$\alpha_3=3.1528-0.00004=3.15276$

検算してみると　$h(3.15276)=31.33810-19.87979-9.45828-2=0.00003\fallingdotseq 0$

以上のことから　$\tan\theta=t=1,-1,2+\sqrt{3},2-\sqrt{3},3.15276$　の時の解を吟味する。

1）$\tan\theta=1$　の時　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　$\tan 3\theta=-1$　$\sin 2\theta=1$　$\cos 4\theta=-1$

(1)の左辺＝$1-1-(-1)=1$　で適する。

2）$\tan\theta=-1$　の時　$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$　$\tan 3\theta=1$　$\sin 2\theta=-1$　$\cos 4\theta=-1$

(1)の左辺＝$-1+1-(-1)=1$　で適する。

3）$\tan\theta=2+\sqrt{3}$　の時　$\tan 3\theta=\dfrac{(2+\sqrt{3})\{3-(2+\sqrt{3})^2\}}{1-3(2+\sqrt{3})^2}=\dfrac{-4(5+3\sqrt{3})}{-4(5+3\sqrt{3})}=1$

$\sin 2\theta=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{2}$　$\cos 2\theta=\dfrac{1-(2+\sqrt{3})^2}{4(2+\sqrt{3})}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$　　(1)の左辺＝$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$

4）$\tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ の時　　$\tan 3\theta = \frac{(2-\sqrt{3})(-4+4\sqrt{3})}{-20+12\sqrt{3}} = 1$

$\sin 2\theta = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}$　　$\cos 2\theta = \frac{-6+4\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$　　(1)の左辺＝$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$

ここで　$\tan 0 < 2 - \sqrt{3} < \tan\frac{\pi}{4} = 1 < 2 + \sqrt{3}$　より

$t^2 - 4t + 1 = 0$ を満たす２解 $\tan\alpha = 2 + \sqrt{3}$　$\tan\beta = 2 - \sqrt{3}$ を求める。

$\tan 2\beta = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{(2-\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

これから　$\beta = \frac{\pi}{12}$　一方　解と係数の関係から　$\tan\alpha\tan\beta = 1$

これが成り立つのは　$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ の時より　　$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5}{12}\pi$

（∵　$\tan\beta\tan(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 1$

5）$\tan\theta = 3.15276$ の時　　$\sin 2\theta = \frac{2 \times 3.15276}{1 + 3.15276^2} = 0.57637$

$\tan 3\theta = \frac{3.15276(3 - 3.15276^2)}{1 - 3 \times 3.15276^2} = 0.75919$　　$\cos 2\theta = \frac{1 - 3.15276^2}{1 + 3.15276^2} = -0.81718$

$\cos 4\theta = 0.33556$　（＊）に代入して

(＊)の左辺＝$0.57637 + 0.75919 - 0.33556 = 1$　で適する。

この時の角は、三角関数表より　$\tan 72°20' = 3.1397$　　$\tan 72°30' = 3.1716$

補完法により　$\frac{3.15276 - 3.1397}{3.1716 - 3.1397} = \frac{0.01306}{0.0319} = 0.4094$

$72°20'$ と $72°30'$ の間の 0.4094 の位置にあるから　$72°24'$

分を度になおして　$72°24' = (72\frac{24}{60})° = 72.4°$　　　このとき　関数電卓から

$\sin 2\theta = \sin 144.8°$＝0.57 64323　　$\tan 3\theta = \tan 217.2°$＝0.7590413

$\cos 4\theta = \cos 289.6°$＝0.3354515　　(1)の左辺＝1.0000221≅1 で成立する。

以上を纏めて　$\theta = 45°$、$-45°$、$15°$、$75°$、$72.4°$（答）

（注 1）　②の第 3 項の因数分解の別解

$t^5 - 6t^4 + 6t^3 + 8t^2 + 5t - 2 = (t^2 + at + b)(t^3 + ct^2 + dt + e)$

と 整係数に因数分解できたとすると

右辺＝$t^5 + (c + a)t^4 + (d + ac + b)t^3 + (e + ad + bc)t^2 + (ae + bd)t + be$

係数比較して　$be = -2$　　$ae + bd = 5$　$e + ad + bc = 8$

$d + ac + b = 6$　$c + a = -6$

整係数より $be = -2$ より　$(b, e) = (-1,2), (1,-2), (-2,1), (2,-1)$ に分けて考える。

1）$b = -1,\ \ e = 2$ のとき

これを上記の第 2 式から 5 式に代入して

$2a - d = 5$　　$ad - c = 6$　　$d + ac = 7$　　$c + a = -6$

c, d を a で表し第 2 式に代入　$a(2a - 5) + 6 + a = 6$　$2a(a - 2) = 0$

$a = 0$ のとき　$d = -5$　$c = -6$　また　$a = 2$ のとき　$d = -1$　$c = -8$

第 3 式に代入してチェック　前者は　$d + ac = -5 \neq 7$　不適

後者は　$d + ac = -17 \neq 7$　　不適

従って　1）のときは解を持たない。

2）$b = 1,\ \ e = -2$ のとき　同様に

$d - 2a = 5$　　$ad + c = 10$　　$d + ac = 5$　　$c + a = -6$

c, d を a で表し第 2 式に代入　$a(2a + 5) - (6 + a) = 10$

$a^2 + 2a - 8 = (a + 4)(a - 2) = 0$

$a = -4$ のとき　$d = -3$　$c = -2$　また　$a = 2$ のとき　$d = 9$　$c = -8$

第 3 式に代入してチェック　前者は　$d + ac = -3 + 8 = 5$　適する。

後者は　$d + ac = 9 - 16 = -7 \neq 5$　　不適

因数分解の一意性から　$(b, e) = (-2,1), (2,-1)$ のときは不適となるため吟味を要しない。従って　2)の前者から

$t^5 - 6t^4 + 6t^3 + 8t^2 + 5t - 2 = (t^2 - 4t + 1)(t^3 - 2t^2 - 3t - 2)$　となる。

（注２）　Wolfram Alpha による $h(t) = 0$ の解

平 23.11.26. の第 76 回数実研で松本先生が紹介された題記の検索エンジン(free)を使って　$h(t) = 0$ を解くと 一発で　$t = 3.1527576$ 、$t = -0.5763788 \pm 0.5496842i$ が求められた。計算等に大変重宝している。

（2） $\tan x \tan(x+\frac{\pi}{6}) = 2\sin x$ $(0< \theta < \frac{\pi}{2})$

まず 左辺を $\tan x$ から $\sin x$, $\cos x$ の方程式に変形する。

$$\frac{\tan x(\tan x+\frac{1}{\sqrt{3}})}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x} = \frac{\tan x(\sqrt{3}\tan x+1)}{\sqrt{3}-\tan x} = 2\sin x$$ 分母子に $\cos^2 x$ を掛け

$$\frac{\sin x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)}{\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cos xx} = 2\sin x$$ $\sin x \neq 0$ より

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x = 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x\cos x$$

$\cos x$ の方程式に直すため $\sin x$ を分離して

$$\sin x(2\cos x+\sqrt{3}) = \cos x(2\sqrt{3}\cos x-1)$$

両辺を平方して $(1-\cos^2 x)(2\cos x+\sqrt{3})^2 = \cos^2 x(2\sqrt{3}\cos x-1)^2$

$$-4\cos^4 x-4\sqrt{3}\cos^3 x+\cos^2 x+4\sqrt{3}\cos x+3 = 12\cos^4 x-4\sqrt{3}\cos^3 x+\cos^2 x$$

これを整理して $16\cos^4 x-4\sqrt{3}\cos x-3=0$

$\sqrt{3}$ を含む因数を検討して $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき 与式=0 から 組立除法で

$$(2\cos x-\sqrt{3})(8\cos^3 x+4\sqrt{3}\cos^2 x+6\cos x+\sqrt{3})=0$$

ここで $0<\cos x<1$ より 左辺第 2 項>0 で解を持たない。

従って $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $x=\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{6}$ （答）

（3） $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x = \cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

左辺、右辺別に第 1 項と第 4 項、 第 2 項と第 3 項を和積の公式で変形する。

左辺＝$2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{1}{2}x$

$\qquad$＝$2\sin\frac{5}{2}x(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{1}{2}x) = 4\sin\frac{5}{2}x\cos x\cos\frac{1}{2}x$

右辺＝$2\cos\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\cos\frac{5}{2}x\cos\frac{1}{2}x$

$\qquad$＝$2\cos\frac{5}{2}x(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{1}{2}x) = 4\cos\frac{5}{2}x\cos x\cos\frac{1}{2}x$

従って　$4\cos x\cos\frac{1}{2}x(\sin\frac{5}{2}x-\cos\frac{5}{2}x)=0$

これから　$4\sqrt{2}\cos x\cos\frac{1}{2}x\sin(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4})=0$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ では　$\cos x\neq 0$ 、$\cos\frac{1}{2}x\neq 0$　また $-\frac{\pi}{4}<\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}<\pi$

これから　$\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}=0$　　$x=\frac{\pi}{10}$　　　　$x=\frac{\pi}{10}$ （答）

以　上