ある連立方程式の別解について

数実研会員　時岡郁夫

数実研会員の村田洋一先生の第130回と第132回のレポートに取り上げられている連立方程式の別解である。

前者は未知数 x，y，z，3個の対称式の連立方程式である。示されている解答は，与えられた方程式を $x+y+z=a$ 等とおき，与えられた方程式を基本対称式で表し，求めている。 $a=0$ の場合，3次方程式が現れ，近似値が示されている。別解は，微分を利用し，3次方程式の解も $Arccos$ を利用して求めた。

後者は， $a_n=ac^n+bd^n$ とおくと， $a_0=1$， $a_1=\frac{1}{2}$， $a_2=\frac{1}{3}$， $a_3=\frac{1}{4}$ となる連立方程式である。別解は，漸化式を利用する解法である。

さらに，未知数の個数と次数を高くした類題を考えてみた。

1．次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \\ x^4+y^4+z^4=98 \end{cases}$$

出典：第130回数実研レポート（2024/8/24）

「私の数学の散歩道(50)シンプルな三元四次連立方程式を解いてみたが、それでも大変」（数実研会員　村田　洋）

$\boxed{\text{解答}}$　$a_n=x^n+y^n+z^n$ とおくと， $a_2=14$， $a_3=20$， $a_4=98$ である。

x，y，z を解にもつ3次方程式を $X^3+pX^2+qX+r=0$ とおく。

$f(X)=X^3+pX^2+qX+r$ とおくと， $f'(X)=3X^2+2pX+q$

$\dfrac{Xf'(X)}{f(X)}=\dfrac{3X^3+2pX^2+qX}{X^3+pX^2+qX+r}=a_0+\dfrac{a_1}{X}+\dfrac{a_2}{X^2}+\dfrac{a_3}{X^3}+\dfrac{a_4}{X^4}+\cdots$ とおくことができる。（※）

係数を掃き出して， a_4 が得られるまで割り算を実行すると，

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad 3,\ -p,\ p^2-2q,\ -p^3+3pq-3r,\ p^4-4p^2q+2q^2+4pr, \\
1,\ p,\ q,\ r\ \big)\ 3,\ 2p,\ q,\ 0 \\
\qquad\qquad 3,\ 3p,\ 3q,\ 3r \\
\hline
\qquad\qquad\quad -p,\ -2q,\ -3r \\
\qquad\qquad\quad -p,\ -p^2,\ -pq,\ -pr \\
\hline
\qquad\qquad\qquad p^2-2q,\ pq-2r,\ pr \\
\qquad\qquad\qquad p^2-2q,\ p^3-2pq,\ p^2q-2q^2,\ p^2r--qr \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad -p^3+3pq-3r,\ -p^2q+2q^2+pr,\ -p^2r+2qr \\
\qquad\qquad\qquad\quad -p^3+3pq-3r,\ -p^4+3p^2q-3pr,\ -p^3q+3pq^2-3qr,\ -p^3r+3pqr-3r^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p^4-4p^2q+2q^2+4pr,\ \cdots
\end{array}$$

したがって，$a_2=p^2-2q=14$　…①，$a_3=-p^3+3pq-3r=20$　…②，$a_4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr=98$　…③

①より， $q=\dfrac{p^2-14}{2}$　…④

④を②に代入すると， $r=\dfrac{p^3-42p-40}{6}$　…⑤

④，⑤を③に代入して整理すると， $p(p-2)(p-8)(p+10)=0$　$\therefore p=0,\ 2,\ 8,\ -10$

[1]　$p=2$ のとき，$(X+2)(X-1)(X-3)=0$　$X=-2,\ 1,\ 3$　$\therefore\{x,\ y,\ z\}=\{-2,\ 1,\ 3\}$

[2]　$p=8$ のとき，$(X-4)(X^2+4X+9)=0$　$X=4,\ 2\pm\sqrt{5}\,i$　$\therefore\{x,\ y,\ z\}=\{4,\ 2\pm\sqrt{5}\,i\}$

[3]　$p=-10$ のとき，$(X+5)(X^2+5X+18)=0$　$X=-5,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{47}\,i}{2}$　$\therefore\{x,\ y,\ z\}=\left\{-5, \dfrac{-5\pm\sqrt{47}\,i}{2}\right\}$

[4]　$p=0$ のとき，$X^3-7X-\dfrac{20}{3}=0$　…⑥

$g(X)=X^3-7X-\dfrac{20}{3}$ とおくと，$g'\ X\ =3X^2-7=0$ より，$X=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

$g\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)=\dfrac{2(-30+7\sqrt{21})}{9}>0$，$g\left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)=-\dfrac{2(30+7\sqrt{21})}{9}<0$

極値の積が負となるので，方程式 $g(X)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ。

$X=a\cos\theta$　（$a>0,\ 0\leqq\theta\leqq\pi$）とおくと，⑥より，$a^3\cos^3\theta-7a\cos\theta=\dfrac{20}{3}$

両辺に $\dfrac{4}{a^3}$ を掛けると，$4\cos^3\theta-\dfrac{28}{a^2}\cos\theta=\dfrac{80}{3a^3}$　…⑦

3 倍角の公式 $\cos3\theta=4\cos^4\theta-3\cos\theta$ が利用できるように a（$a>0$）の値を定める。

$-\dfrac{28}{a^2}=-3$ より，$a=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

このとき⑦より，$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\dfrac{10\sqrt{21}}{49}$　$\cos3\theta=\dfrac{10\sqrt{21}}{49}$

$\therefore\theta=\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}$，$\dfrac{2\pi}{3}\pm\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}$

したがって，

$X=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\dfrac{1}{3}Arc\dfrac{10\sqrt{21}}{49}\fallingdotseq3.03285$,

$X=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}\right)\fallingdotseq-1.19802$,

$X=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}\right)\fallingdotseq-1.83483$

$\{x,\ y,\ z\}=\left\{\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}, \dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\pm\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}\right)\right\}$

よって，以上 [1]～[4] により，

$\{x,\ y,\ z\}=\{-2,\ 1,\ 3\}$，$\{4,\ 2\pm\sqrt{5}\,i\}$，$\{x,\ y,\ z\}=\left\{-5, \dfrac{-5\pm\sqrt{47}\,i}{2}\right\}$，

$\left\{\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}, \dfrac{2\sqrt{21}}{3}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\pm\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{10\sqrt{21}}{49}\right)\right\}$　答

ただし，$\{x,\ y,\ z\}=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ は，
6 通りの解 $\{x,\ y,\ z\}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，$(\alpha,\ \gamma,\ \beta)$，$(\beta,\ \gamma,\ \alpha)$，$(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$，$(\gamma,\ \alpha,\ \beta)$，$(\gamma,\ \beta,\ \alpha)$ を表すものとする。

（※）

$f(X)=(X-x)(X-y)(X-z)$ とおく。

絶対値を取り，対数を取ると，$\log|f(X)|=\log|(X-x)(X-y)(X-z)|=\log|X-x|+\log|X-y|+\log|X-z|$

両辺を X で微分すると，

$$\frac{f'(X)}{f(X)}=\frac{1}{X-x}+\frac{1}{X-y}+\frac{1}{X-z}$$

両辺に X を掛けると，

$$\frac{Xf'(X)}{f(X)}=\frac{X}{X-x}+\frac{X}{X-y}+\frac{X}{X-z}=\frac{1}{1-\frac{x}{X}}+\frac{1}{1-\frac{y}{X}}+\frac{1}{1-\frac{z}{X}}$$

$max\left(\left|\dfrac{x}{X}\right|, \left|\dfrac{y}{X}\right|, \left|\dfrac{z}{X}\right|\right)<1$ なる X について，

$$\frac{Xf'(X)}{f(X)}=\left(1+\frac{x}{X}+\frac{x^2}{X^2}+\frac{x^3}{X^3}+\cdots\right)+\left(1+\frac{y}{X}+\frac{y^2}{X^2}+\frac{y^3}{X^3}+\cdots\right)+\left(1+\frac{z}{X}+\frac{z^2}{X^2}+\frac{z^3}{X^3}+\cdots\right)$$

$$=3+\frac{x+y+z}{X}+\frac{x^2+y^2+z^2}{X^2}+\frac{x^3+y^3+z^3}{X^3}+\cdots=a_0+\frac{a_1}{X}+\frac{a_2}{X^2}+\frac{a_3}{X^3}+\cdots$$ 終

２. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ac+bd=\dfrac{1}{2} \\ ac^2+bd^2=\dfrac{1}{3} \\ ac^3+bd^3=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

出典：第 132 回数実研レポート（2025/2/5）

私の数学の散歩道 (51) 見掛け上簡単な 四元四次連立方程式を解いてみたが 結構大変。（数実研会員　村田　洋一）

解答　$a_n=ac^n+bd^n$ とおくと，$a_0=1$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，$a_3=\dfrac{1}{4}$　…①

c，d を解にもつ 2 次方程式を，$x^2+px+q=0$　…②とおく。

c は②の解であるから，$c^2+pc+q=0$

この両辺に ac^n を掛けると，$ac^{n+2}+p\cdot ac^{n+1}+q\cdot ac^n=0$　…③

同様に，d は②の解であるから，$d^2+pd+q=0$

この両辺に bd^n を掛けると，$bd^{n+2}+p\cdot bd^{n+1}+q\cdot bd^n=0$　…④

③+④より，$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$　…⑤

漸化式⑤で，$n=0$ とおくと，$\dfrac{1}{3}+p\cdot\dfrac{1}{2}+q\cdot 1=0$　…⑥

$n=1$ とおくと，$\dfrac{1}{4}+p\cdot\dfrac{1}{3}+q\cdot\dfrac{1}{2}=0$　…⑦

⑥，⑦より，$p=-1$，$q=\dfrac{1}{6}$

このとき，②より，c，d は，$x^2-x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 解である。

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ より，$(c,\ d)=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$，$\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$

次に，①より，$b=1-a$

これを②に代入すると，$ac+(1-a)d=\dfrac{1}{2}$

$c\neq d$ であるから，$a=\dfrac{\frac{1}{2}-d}{c-d}$

[1]　$(c,\ d)=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ のとき，$a=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\frac{3+\sqrt{3}}{6}}=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

[2]　$(c,\ d)=\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ のとき，$a=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b,\ c,\ d)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 答

補足　ac^4+bd^4 の値

$ac^4+bd^4=a_4$ であるから，漸化式⑤で，$n=2$ とおくと，$a_4+(-1)\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}=0$　$\therefore a_4=ac^4+bd^4=\dfrac{7}{36}$

3．次の連立6元6次方程式を解け。

$$\begin{cases} p+q+r=3 \\ px+qy+rz=5 \\ px^2+qy^2+rz^3=7 \\ px^3+qy^3+rz^3=11 \\ px^4+qy^4+rz^4=13 \\ px^5+qy^5+rz^5=17 \end{cases}$$

解答

$px^n+qy^n+rz^n=a_n$ とおくと，$a_0=3$，$a_1=5$，$a_2=7$，$a_3=11$，$a_4=13$，$a_5=17$ である。

$x,\ y,\ z$ を解にもつ3次方程式を $t^3+kt^2+lt+m=0$　…①とおく。

x は①の解であるから，$x^3+kx^2+lx+m=0$

両辺に ax^n を掛けると，$ax^{n+3}+k\cdot ax^{n+2}+l\cdot ax^{n+1}+m\cdot ax^n=0$　…②

同様に，y は①の解であるから，$y^3+ky^2+ly+m=0$

両辺に by^n を掛けると，$by^{n+3}+k\cdot by^{n+2}+l\cdot by^{n+1}+m\cdot by^n=0$　…③

z も①の解であるから，$z^3+kz^2+lz+m=0$

両辺に cz^n を掛けると，$cz^{n+3}+k\cdot cz^{n+2}+l\cdot cz^{n+1}+m\cdot cz^n=0$　…④

②+③+④より，$a_{n+3}+ka_{n+2}+la_{n+1}+ma_n=0$　…⑤

漸化式⑤に，

$n=0$ を代入すると，$11+7k+5l+3m=0$　…⑥

$n=1$ を代入すると，$13+11k+7l+5m=0$　…⑦

$n=2$ を代入すると，$17+13k+11l+7m=0$　…⑧

⑥，⑦，⑧を連立させて解くと，$k=-2$，$l=-3$，$m=6$

したがって，漸化式⑤は，$a_{n+3}-2a_{n+2}-3a_{n+1}+6a_n=0$　…⑤′

また，$k=-2$，$l=-3$，$m=6$ のとき，①は，$(t-2)(t^2-3)=0$　$\therefore t=2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$

$\{x,\ y,\ z\}=\{2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$

[1]　$x,\ y,\ z=(2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ のとき，$a_n=p\cdot 2^n+q(\sqrt{3})^n+r(-\sqrt{3})^n$ より，

$a_0=p+q+r=3$，$a_1=2p+\sqrt{3}q-\sqrt{3}r=5$，$a_2=4p+3q+3r=7$

この3式を連立させて解くと，$p=-2$，$q=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，$r=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$

同様に，

[2]　$x,\ y,\ z=(2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ のとき，$p=-2$，$q=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$，$r=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$

[3]　$x,\ y,\ z=(\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 2)$ のとき，　$p=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，　$q=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$，　$r=-2$

[4]　$x,\ y,\ z=(\sqrt{3},\ 2,\ -\sqrt{3})$ のとき，　$p=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，　$q=-2$，　$r=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$

[5]　$x,\ y,\ z=(-\sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{3})$ のとき，　$p=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$，　$q=-2$，　$r=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$

[6]　$x,\ y,\ z=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2)$ のとき，　$p=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{2}$，　$q=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，　$r=-2$

よって，求める解は次の６組である。

$(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r)=$

$$\left(2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -2,\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 2,\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2},\ -2\right),\ \left(\sqrt{3},\ 2,\ -\sqrt{3},\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2},\ -2,\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(-\sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{3},\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2},\ -2,\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2,\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2},\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2},\ -2\right)$$ 答

補足　$px^n+qy^n+rz^n$ の値について

漸化式⑤′を利用すると，a_n の値を次々と求められる。

$\cdots,\ a_{-2}=\dfrac{3}{4}$，$a_{-1}=\dfrac{7}{6}$，$a_6=7$，$a_7=-13$，$\cdots$

また，[1] のとき，

$$a_n=px^n+qy^n+rz^n=-2\cdot 2^n+\frac{5+3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n+\frac{5-3\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})^n$$
$$=\frac{1}{2}\{(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n+(5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n-2^{n+2}\}$$

[2]～[6] のときも，$a_n=\dfrac{1}{2}\{(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n+(5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n-2^{n+2}\}$ となるから，

$$px^n+qy^n+rz^n=\frac{1}{2}\{(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n+(5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n-2^{n+2}\}$$（n は整数）

４．連立８元８次方程式 $\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ ap+bq+cr+ds=3 \\ ap^2+bq^2+cr^2+ds^2=5 \\ ap^3+bq^3+cr^3+ds^3=7 \\ ap^4+bq^4+cr^4+ds^4=11 \\ ap^5+bq^5+cr^5+ds^5=13 \\ ap^6+bq^6+cr^6+ds^6=19 \\ ap^7+bq^7+cr^7+ds^7=23 \end{cases}$ を満たす $a,\ b,\ c,\ d,\ p,\ q,\ r,\ s$ について，

$ap^8+bq^8+cr^8+ds^8$ の値を求めよ。

解答　$ap^n+bq^n+cr^n+ds^n=a_n$ とおくと，$a_0=2$，$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=7$，$a_4=11$，$a_5=13$，$a_6=19$，$a_7=23$ である。

$p,\ q,\ r,\ s$ を解にもつ４次方程式を $x^4+ex^3+fx^2+gx+h=0$　…①とおく。

p は①の解であるから，$p^4+ep^3+fp^2+gp+h=0$

両辺に ap^n を掛けると， $ap^{n+4}+e\cdot ap^{n+3}+f\cdot ap^{n+2}+g\cdot ap^{n+1}+h\cdot ap^n=0$　…②

同様に， q，r，s も①の解であるから， $bq^{n+4}+e\cdot bq^{n+3}+f\cdot bq^{n+2}+g\cdot bq^{n+1}+h\cdot bq^n=0$　…③

$cr^{n+4}+e\cdot cr^{n+3}+f\cdot cr^{n+2}+g\cdot cr^{n+1}+h\cdot cr^n=0$　…④

$ds^{n+4}+e\cdot ds^{n+3}+f\cdot ds^{n+2}+g\cdot ds^{n+1}+h\cdot ds^n=0$　…⑤

②+③+④+⑤より， $a_{n+4}+ea_{n+3}+fa_{n+2}+ga_{n+1}+ha_n=0$　…⑥

漸化式⑥に，

$n=0$ を代入すると， $11+7e+5f+3g+2h=0$　…⑦

$n=1$ を代入すると， $13+11e+7f+5g+3h=0$　…⑧

$n=2$ を代入すると， $19+13e+11f+7g+5h=0$　…⑨

$n=3$ を代入すると， $23+19e+13f+11g+7h=0$　…⑩

⑦，⑧，⑨，⑩を連立させて解くと， $e=-6$， $f=6$， $g=19$， $h=-28$

このとき⑥は， $a_{n+4}-6a_{n+3}+6a_{n+2}+19a_{n+1}-28a_n=0$

これに $n=4$ を代入すると， $a_8-6\cdot 23+6\cdot 19+19\cdot 13-28\cdot 11=0$　$\therefore a_8=85$

よって， $ap^8+bq^8+cr^8+dr^8=85$　答

(2025/5/28　tokioka@i4.gmobb.jp)