三角形の五心の位置ベクトルと内積

時岡郁夫

0．はじめに

次の通り，三角形の垂心や外心など五心の位置ベクトルを求める問題が出題されている。

【2018　早稲田大】

三角形OABにおいてOA＝2，OB＝5，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ とする。三角形OABの垂心を

Hとするとき，三角形HABの面積は$\dfrac{\text{ア}\boxed{}\sqrt{\text{イ}\boxed{}}}{\text{ウ}\boxed{}}$ である。

【2019　早稲田大】

三角形ABCにおいて，AB＝2，AC＝3，BC＝4 とする。三角形ABCの外接円の中心をP，内接円の中心をIとするとき，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\text{ア}\boxed{}\overrightarrow{AB}+\text{イ}\boxed{}\overrightarrow{AC}}{\text{ウ}\boxed{}}$ である。また，$IP=\dfrac{\text{エ}\boxed{}\sqrt{\text{オ}\boxed{}}}{\text{カ}\boxed{}}$ である。

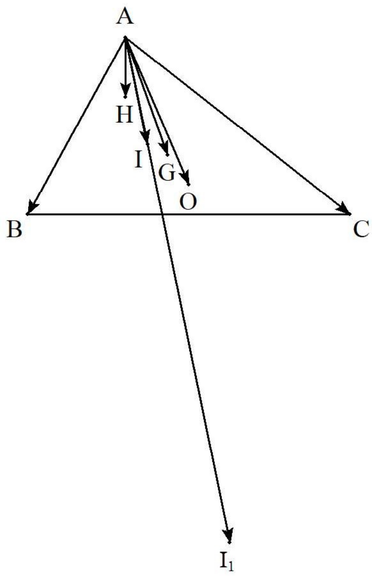
【2019　千葉大】

三角形ABCにおいて ∠A＝45°，∠B＝60° である。頂点Aから辺BCに引いた垂線とBCが交わる点をDとし，頂点Cから辺ABに引いた垂線とABが交わる点をEとする。また，$\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線CEと直線ADの交点をHとするとき，$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

1．問題の設定



BC＝a，CA＝b，AB＝c である△ABCの重心，垂心，内心，外心，∠A内の傍心をそれぞれG，H，I，O，I_1 とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，△ABC＝S とおくと，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\text{（ヘロンの公式）}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$$

より，$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=(4S)^2$

である。

このとき，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，次のベクトルを計算する。

[1]　(1)　$\overrightarrow{AG}$　　(2)　$\overrightarrow{AH}$　　(3)　$\overrightarrow{AI}$　　(4)　$\overrightarrow{AO}$　　(5)　$\overrightarrow{AI_1}$

さらに，${}_5C_2=10$ であるから，次の10通りの内積を計算する。

[2]　(1)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}$　　(3)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}$　　(4)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

　　(5)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$　　(6)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AO}$　　(7)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(8)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AO}$

　　(9)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(10)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

２．計算

[1]　$|\vec{b}|=c$，$|\vec{c}|=b$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos A=cb\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ である。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$　答

(2)　AH と BCの交点を D とすると，BD$=c\cos B$，DC$=b\cos C$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b\cos C\vec{b}+c\cos B\vec{c}}{a}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\vec{b}+\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\vec{c}$

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\vec{b}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\vec{b}+k\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k\vec{b}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k\vec{c}-\vec{b}$

$=\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\vec{b}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ であるから，$\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=0$ より，$\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k|\vec{c}|^2=0$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$，$|\vec{c}|=b$ であるから，

$\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}kb^2=0$

ここで，△ABC$=S$ とおくと，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ であるから，

$k=\dfrac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{c}$　答　…(*)

別解　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$　$(s-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+t\vec{c}\cdot\vec{c}=0$　$(s-1)\cdot bc\cos A+tb^2=0$

$\therefore s+\dfrac{b}{c\cos A}t=1$　…①

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$　$s\vec{b}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{c}\cdot\vec{b}=0$　$sc^2+(t-1)\cdot bc\cos A=0$

$\therefore \dfrac{c}{b\cos A}s+t=1$　…②

②$\times\dfrac{b}{c\cos A}$ −①より，$\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right)s=\dfrac{b}{c\cos A}$

$s\tan^2 A=\dfrac{b-c\cos A}{c\cos A}=\dfrac{a\cos C}{c\cos A}=\dfrac{\sin A\cos C}{\sin C\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan C}$　$\therefore s=\dfrac{1}{\tan A\tan C}$

同様に，①$\times\dfrac{c}{b\cos A}$ −②より，$t=\dfrac{1}{\tan A\tan B}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\vec{b}}{\tan A\tan C}+\dfrac{\vec{c}}{\tan A\tan B}$　答

補足　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{2S}{bc}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$ 等を代入すると，(*) と同じ結果になる。

(3)　AI と BCの交点を E とすると，BE : EC$=c:b$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{c+b}$

AI : IE$=c:\dfrac{c}{b+c}a=(b+c):a$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\times\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$　答

(4)　AO と 外接円との交点を F とし，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=k\vec{b}+l\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=2k\vec{b}+2l\vec{c}$

$\angle$ABF$=90°$より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=0$　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$\vec{b}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=c^2$　$2kc^2+2l\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c^2$　$2c^2k+(b^2+c^2-a^2)l=c^2$　…①

同様に，$\angle$ACF$=90°$より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=0$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$\vec{c}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=b^2$　$2k\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2lc^2=b^2$　$(b^2+c^2-a^2)k+2c^2l=b^2$　…②

①，②を連立させて，$k=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}$　…③，$l=\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}\vec{c}$　答

補足

さらに，③は，$k=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}=\dfrac{b^2\cdot 2ca\cos B}{2bc\sin A\cdot 2ab\sin C}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}$，

同様に，$l=\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{\cos B}{2\sin A\sin C}\vec{b}+\dfrac{\cos C}{2\sin A\sin B}\vec{c}=\dfrac{1}{2\sin A}\left(\dfrac{\cos B}{\sin C}\vec{b}+\dfrac{\cos C}{\sin B}\vec{c}\right)$

と表すこともできる。

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ と向きが等しい単位ベクトルの $\mathrm{AI_1}$ 倍である。

I，$\mathrm{I_1}$ から AB に下した垂線の足をそれぞれ J，K とすると，AJ$=s-a$，AK$=s$ である。

$\triangle$AJI$\backsim\triangle\mathrm{AKI_1}$ であるから，$\dfrac{s-a}{AI}=\dfrac{s}{AI_1}$ より，$\mathrm{AI_1}=\dfrac{s}{s-a}$ AI となる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\mathrm{AI_1}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{AI}=\dfrac{s}{s-a}AI\cdot\dfrac{\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}}{AI}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}$　答

[2]　[1] の結果をまとめると，

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{c},\\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c},\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}\end{array}}$$

となる。

また，$|\vec{b}|=c$，$|\vec{c}|=b$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ に注意して，各内積を計算すると次の通りとなる。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{3}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{(b+c)(b+c-a)}{6}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{b^2+c^2}{6}$ (4) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{(b+c)(a+b+c)}{6}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(a+b+c)}$ (6) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)\{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\}}{2(4S)^2}$

(7) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(b+c-a)}$ (8) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{bc(b+c)}{2(a+b+c)}$

(9) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=bc$ (10) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{bc(b+c)}{2(b+c-a)}$

３．おわりに

これらの結果から，次の等式，不等式をつくることができる。

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}}{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}}=\frac{b+c-a}{a+b+c},\quad 3\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\geqq\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}$$

【参考文献】

特になし

(2023/6/10　札幌市　tokioka3@phoenix−c.or.jp)