立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

初等数学 HP 問題の解答例

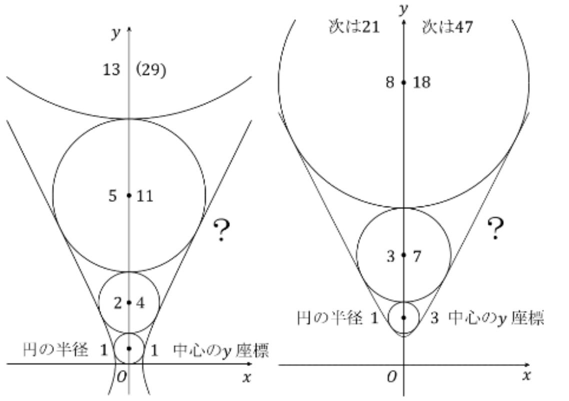
初等数学の会の HP（https://shotosugaku.shopinfo.jp/）の Topics に，2017 年 11 月から解答なしの問題が掲載されている。その中からいくつか解いてみた。

● 解いた問題（解答は HP に未掲載）

初等数学ＨＰ問題（17-03）

「フィボナッチ数列」1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,…
の奇数番目の項を半径とし、中心がy軸上にあって、
「リュカ数列」1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,2207,…
の奇数番目の項を中心のy座標をとする円を考える。この円は隣り合うものどうしが外接している。さらに、ある双曲線に接している。その双曲線の方程式を求めよ。

同様に、フィボナッチ数列の偶数番目の項を半径とし、中心がy軸上にあって、リュカ数列の偶数番目の項を中心のy座標をとする円を考える。この円は隣り合うものどうしが外接している。さらに、ある双曲線に接している。その双曲線の方程式を求めよ。



（松田康雄 出題）

初等数学ＨＰ問題（17-05）

平行四辺形 ABCD と 1 点 P がある。このとき，△PAB，△PBC，△PBD の 3 つの三角形について関係を求めよ。

（坂下正雄先生出題「初等数学 10 号」(1987 年 3 月発行 p.53)）

初等数学ＨＰ問題（17-08）

次の覆面算を解け．

	ぬくぬく
＋	ぬくもれ
	いぬとしも

初等数学ＨＰ問題（18-01）

次の巡回分数式の値を求めよ。

(1) $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$　　(2) $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{c}$

(3) $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{d}=\frac{c+d}{a}=\frac{d+a}{b}$　　(4) $\frac{c+d}{a+b}=\frac{d+e}{b+c}=\frac{e+a}{c+d}=\frac{b+c}{e+a}$

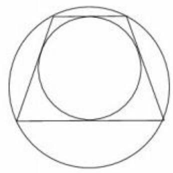
（早川学而「数学教育論文集」昭和 54(1979)年）

初等数学ＨＰ問題（18-02）

(1) 2 乗すると下 3 桁に 0 以外の同じ数が並ぶような 2 桁の整数を求めよ。
(2) 3 乗すると下 4 桁に 0 以外の同じ数が並ぶような 3 桁の整数を求めよ。

初等数学ＨＰ問題（18-03）

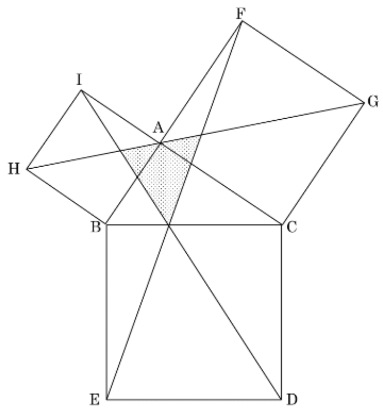
上底と下底の長さの比が２：３ の等脚台形に内接円があるとき，内接円と外接円の半径の比を求めよ。



● 解いた問題（解答は HP に掲載されている）

初等数学ＨＰ問題（17-06）

△ABC の外側に正方形を作る。BC = 5, CA = 4, AB = 3 のとき，ID，FE，HG の作る三角形の面積はいくらか。
また，BC = a, CA = b, AB = c のときはどうなるか。

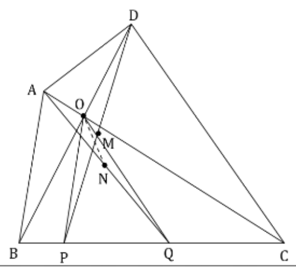


（長光実先生が紹介された生徒が考案した出題を清宮俊雄先生が拡張された問題。「初等数学 24 号」(1992 年 1 月発行 p.61)）

初等数学ＨＰ問題（17-02）

凸四角形ABCDの対角線AC, BD の交点 O を通り，AB, DC に平行にひいた直線とBC との交点をP, Q とするとき，$BP^2 + CQ^2 = PQ^2$ ならば DP, AQ の中点M, N とOとは一直線上にあることを証明せよ。

（昭和 2 年 4 月 10 日作）



・初等数学 26 号（1992 年 11 月発行）で清宮俊雄先生が出題された問題。
初等数学休刊のため、解答が示されないままの問題。

初等数学 HP 問題（17-03）

奇数番目の問題を(1)，偶数番目の問題を(2)とする。

解答の方針は，１番目の円と２番目の円に接する双曲線の方程式を求め，それにn番目の円も接することを示す。

問題に使用されている２つの数列に名前をつける。

数列$\{f_n\}:1,1,2,3,5,8,13,\cdots$は，漸化式 $f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\ (n=1,2,\cdots)\cdots$① として表される。

同様に，数列$\{l_n\}:1,3,4,7,11,18,29,\cdots$は，漸化式$l_1=1, l_2=1, l_{n+2}=l_{n+1}+l_n\ (n=1,2,\cdots)\cdots$② として表される。

①を $f_{n+2}-\alpha f_{n+1}=\beta(f_{n+1}-\alpha f_n)$ と変形すると，$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$ より α,β は$t^2-t-1=0$ の２解である。

$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく。（$\beta-\alpha=\sqrt{5}$ ）

数列$\{f_{n+1}-\alpha f_n\}$は，初項 $f_2-\alpha f_1=1-\alpha=\beta$，公比$\beta$ の等比数列であるから　$f_{n+1}-\alpha f_n=\beta\times\beta^{n-1}=\beta^n\cdots$③

同様に，数列$\{f_{n+1}-\beta f_n\}$は，初項 $f_2-\beta f_1=1-\beta=\alpha$，公比$\alpha$ の等比数列であるから　$f_{n+1}-\beta f_n=\alpha^n\cdots$④

③－④を計算すると　$(\beta-\alpha)f_n=\beta^n-\alpha^n$　$\therefore f_n=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\cdots$⑤

同様に②を$l_{n+2}-\alpha l_{n+1}=\beta(l_{n+1}-\alpha l_n)$と変形すると，$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$ より α,β は$t^2-t-1=0$ の２解である。

$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$\beta-\alpha=\sqrt{5}$

数列$\{l_{n+1}-\alpha l_n\}$は，初項$l_2-\alpha l_1=3-\alpha=\sqrt{5}\beta$，公比$\beta$ の等比数列であるから　$l_{n+1}-\alpha l_n=\sqrt{5}\beta\times\beta^{n-1}=\sqrt{5}\beta^n\cdots$⑥

同様に，数列$\{l_{n+1}-\beta l_n\}$は，初項$l_2-\beta l_1=3-\beta=-\sqrt{5}\alpha$，公比$\alpha$ の等比数列であるから

$l_{n+1}-\beta l_n=-\sqrt{5}\alpha\times\alpha^{n-1}=-\sqrt{5}\alpha^n\cdots$⑦

⑥－⑦を計算すると　$(\beta-\alpha)l_n=\sqrt{5}\beta^n+\sqrt{5}\alpha^n$　$\therefore l_n=\dfrac{\sqrt{5}(\beta^n+\alpha^n)}{\beta-\alpha}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots$⑧

(1)　数列$\{f_n\}$の奇数番目の数列を$\{a_n\}$，数列$\{l_n\}$の奇数番目の数列を$\{b_n\}$とおくと⑤，⑧より

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right\},\quad b_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$$

中心$(0,b_n)$，半径a_n の円の方程式は　$x^2+(y-b_n)^2=a_n{}^2\cdots$⑨

求める双曲線の方程式を　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (y>0)\cdots$⑩　とおく。

２式からxを消去するために，⑨$\times b^2-$⑩$\times a^2b^2$ を計算すると　$(a^2+b^2)y^2-2b^2b_ny+b^2(b_n{}^2-a_n{}^2+a^2)=0$

この判別式をD とおくと，$\dfrac{D}{4}=(-b^2b_n)^2-(a^2+b^2)\times b^2(b_n{}^2-a_n{}^2+a^2)=b^2[(a_n{}^2-a^2)b^2-a^2(b_n{}^2-a_n{}^2+a^2)]$

⑨と⑩は接するから，$D=0$で，$b^2\neq 0$ であるから　$(a_n{}^2-a^2)b^2-a^2(b_n{}^2-a_n{}^2+a^2)=0\cdots$⑪

[1]　１番目の円と接するとき，

$a_1=1, b_1=1$ を⑪に代入して　$(1^2-a^2)b^2-a^2(1^2-1^2+a^2)=0$　$\therefore (1^2-a^2)b^2-a^4=0 \cdots$⑫

[2]　２番目の円と接するとき，

$a_2=2, b_2=4$ を⑪に代入して　$(2^2-a^2)b^2-a^2(4^2-2^2+a^2)=0$　$\therefore (4-a^2)b^2-a^2(12+a^2)=0 \cdots$⑬

⑫，⑬を a^2, b^2 について解くと，$a^2=\dfrac{4}{5}, b^2=\dfrac{16}{5}$

よって，⑩は，$\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{16}y^2=1$ となる。

ここで，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}=A$，$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}=B$ とおくと，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(A-B)$，$b_n=A+B$ となり，

$AB=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{2n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$ である。

このとき，⑪の左辺は，

$$\left(a_n{}^2-\frac{4}{5}\right)\frac{16}{5}-\frac{4}{5}\left(b_n{}^2-a_n{}^2+\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}(5a_n{}^2-b_n{}^2-4)=\frac{4}{5}\left[5\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(A-B)\right\}^2-(A+B)^2-4\right]=\frac{4}{5}(-4AB-4)=\frac{4}{5}\{-4(-1)-4\}=0$$

よって，⑪が成り立つから，n 番目の円も接する。

（答）$\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{16}y^2=1(y>0)$

(2) 数列 $\{f_n\}$ の偶数番目の数列を $\{c_n\}$，数列 $\{l_n\}$ の偶数番目の数列を $\{d_n\}$ とおくと⑤，⑧より

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right\},\quad d_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$$

中心 $(0, d_n)$，半径 c_n の円の方程式は　$x^2+(y-d_n)^2=c_n{}^2 \cdots$⑭

求める双曲線の方程式を　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1(y>0) \cdots$⑮　とおく。

２式から x を消去するために，⑭ $\times b^2-$ ⑮ $\times a^2b^2$ を計算すると　$(a^2+b^2)y^2-2b^2d_ny+b^2(d_n{}^2-c_n{}^2-a^2)=0$

この判別式を D とおくと，$\dfrac{D}{4}=(-b^2d_n)^2-(a^2+b^2)\times b^2(d_n{}^2-c_n{}^2-a^2)=b^2[(c_n{}^2+a^2)b^2-a^2(d_n{}^2-c_n{}^2-a^2)]$

⑨と⑩は接するから，$D=0$ で，$b^2\neq 0$ であるから　$(c_n{}^2+a^2)b^2-a^2(d_n{}^2-c_n{}^2-a^2)=0 \cdots$⑯

[1]　１番目の円と接するとき，

$c_1=1, d_1=3$ を⑯に代入して　$(1^2+a^2)b^2-a^2(3^2-1^2-a^2)=0$　$\therefore (1^2-a^2)b^2-a^2(8-a^2)=0 \cdots$⑰

[2]　２番目の円と接するとき，

$a_2=3, b_2=7$ を⑯に代入して　$(3^2+a^2)b^2-a^2(7^2-3^2-a^2)=0$　$\therefore (9+a^2)b^2-a^2(40-a^2)=0 \cdots$⑱

⑰，⑱を a^2, b^2 について解くと，$a^2=\dfrac{4}{5}, b^2=\dfrac{16}{5}$

よって，⑮は，$\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{16}y^2=-1(y>0)$ となる。

ここで，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=A$，$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=B$ とおくと，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(A-B)$，$b_n=A+B$ となり，

$AB=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^{2n}=(-1)^{2n}=1$ である。

このとき，⑯の左辺は,

$$\left(c_n{}^2+\frac{4}{5}\right)\frac{16}{5}-\frac{4}{5}\left(d_n{}^2-c_n{}^2-\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}\left(5c_n{}^2-d_n{}^2+4\right)=\frac{4}{5}\left[5\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(A-B)\right\}^2-(A+B)^2+4\right]=\frac{4}{5}(-4AB+4)=\frac{4}{5}\{-4\cdot1+4\}=0$$

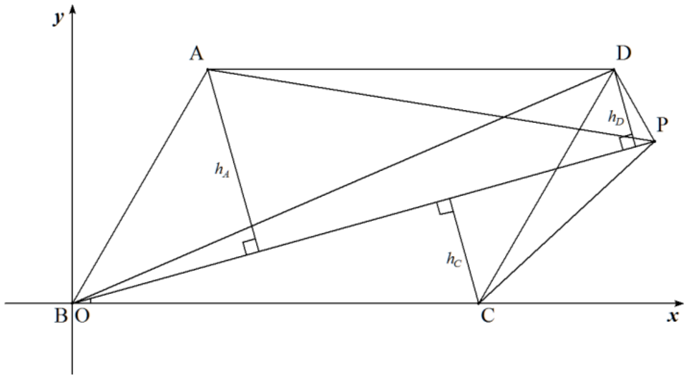
よって，⑯が成り立つから，n 番目の円も接する。

（答）$\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{16}y^2=-1(y>0)$

(2017/12/25)

初等数学 HP 問題（17-05）

（解）座標平面で考える。



$b>0,c>0$ として $\mathrm{A}(a,b)$，$\mathrm{B}(0,0)$，$\mathrm{C}(c,0)$ とおくと，四角形 ABCD は平行四辺形であるから $\mathrm{D}(a+c,b)$ と表される。（点 A は第１か第２象限）

点 P を任意にとり，$\angle\mathrm{PBC}=\theta(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とおくと，

BP の方程式は，$x\tan\theta-y=0$

3 点 A，C，D と直線 BP との距離をそれぞれ h_A，h_C，h_D とおくと，

$$h_A=\frac{|a\tan\theta-b|}{\sqrt{\tan^2\theta+(-1)^2}}=|a\sin\theta-b\cos\theta|$$

$$h_C=\frac{|c\tan\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta+(-1)^2}}=|c\sin\theta|=c\sin\theta$$

$$h_D=\frac{|(a+c)\tan\theta-b|}{\sqrt{\tan^2\theta+(-1)^2}}=|(a+c)\sin\theta-b\cos\theta|=|a\sin\theta-b\cos\theta+c\sin\theta|$$

[1]　$a\sin\theta-b\cos\theta\geqq0$ のとき，$h_A=a\sin\theta-b\cos\theta$

　このとき，$h_D=|h_A+h_C|=h_A+h_C\cdots$①

[2]　$a\sin\theta-b\cos\theta<0$ のとき，$h_A=-(a\sin\theta-b\cos\theta)$

　このとき，$h_D=|-h_A+h_C|=\begin{cases}-h_A+h_C\\ h_A-h_C\end{cases}$

　移項すると，$h_C=h_A+h_D$ または $h_A=h_C+h_D\cdots$②

①，②より h_A,h_C,h_D のうち，どれか１つは他の２つの和になっている。

それぞれに $\frac{1}{2}BP$ を掛けると，$\frac{1}{2}BPh_A=\triangle PAB$，$\frac{1}{2}BPh_C=\triangle PBC$，$\frac{1}{2}BPh_D=\triangle PBD$ であるから，△PAB，△PBC，△PBD の３つの三角形の関係は，どれか１つの三角形の面積は他の２つの三角形の面積の和になっている。

(2017/12/3)

初等数学 HP 問題（17-08）

1. 千の位「ぬ」＝9 である。
   8 以下だと「ぬ＋ぬ」の一の位が「ぬ」になるためには百の位「く＋く」のところで 2 以上の繰り上がりが必要となるが，それは不可能であるから。
2. このとき，「い」＝1 である。
3. 百の位「く＋く」で 1 繰り上がらなければならないので，「く」≧5 である。
   暗黙の了解で，異なる文字は異なる数字を表すから，残りの {く，も，れ，と，し} は {0，2，3，4，5，6，7，8} のいずれかである。

(1) 「く」＝5 のとき
- ① 「も」＝0 のとき，「れ」＝5 となり，不適
- ② 「も」＝2 のとき，「れ」＝7，「し」＝2 となり，不適
- ③ 「も」＝3 のとき，「れ」＝8，「し」＝3 となり，不適
- ④ 「も」＝4 のとき，「れ」＝9 となり，不適
- ⑤ 「も」＝6 のとき，「れ」＝1 となり，不適
- ⑥ 「も」＝7 のとき，「れ」＝2，「し」＝6，「と」＝1 となり，不適
- ⑦ 「も」＝8 のとき，「れ」＝3，「し」＝7，「と」＝1 となり，不適

(2) 「く」＝6 のとき
- ① 「も」＝0 のとき，「れ」＝4，「し」＝0 となり，不適
- ② 「も」＝2 のとき，「れ」＝6 となり，不適
- ③ 「も」＝3 のとき，「れ」＝7，「し」＝3 となり，不適
- ④ 「も」＝4 のとき，「れ」＝8，「し」＝4 となり，不適
- ⑤ 「も」＝5 のとき，「れ」＝9 となり，不適
- ⑥ 「も」＝7 のとき，「れ」＝1 となり，不適
- ⑦ 「も」＝8 のとき，「れ」＝2，「し」＝7，「と」＝3 となり，適

(3) 「く」＝7 のとき
- ① 「も」＝0 のとき，「れ」＝3，「し」＝0 となり，不適
- ② 「も」＝2 のとき，「れ」＝5，「し」＝2 となり，不適
- ③ 「も」＝3 のとき，「れ」＝6，「し」＝3 となり，不適
- ④ 「も」＝4 のとき，「れ」＝7 となり，不適
- ⑤ 「も」＝5 のとき，「れ」＝8，「し」＝5 となり，不適
- ⑥ 「も」＝6 のとき，「れ」＝9 となり，不適
- ⑦ 「も」＝8 のとき，「れ」＝1 となり，不適

(4) 「く」＝8 のとき
- ① 「も」＝0 のとき，「れ」＝2，「し」＝0 となり，不適
- ② 「も」＝2 のとき，「れ」＝4，「し」＝2 となり，不適
- ③ 「も」＝3 のとき，「れ」＝5，「し」＝3 となり，不適
- ④ 「も」＝4 のとき，「れ」＝6，「し」＝4 となり，不適
- ⑤ 「も」＝5 のとき，「れ」＝7，「し」＝5 となり，不適
- ⑥ 「も」＝6 のとき，「れ」＝8 となり，不適
- ⑦ 「も」＝7 のとき，「れ」＝9 となり，不適

以上より，覆面算の答は 1 通りで，次の通り

$$\begin{array}{r} 9696 \\ +\,9682 \\ \hline 19378 \end{array}$$

（2017/12/23）

初等数学HP問題（18-01）

<table><tr><td>
次の巡回分数式の値を求めよ。
(1) $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$　　(2) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}$
(3) $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{d}=\dfrac{c+d}{a}=\dfrac{d+a}{b}$　　(4) $\dfrac{c+d}{a+b}=\dfrac{d+e}{b+c}=\dfrac{e+a}{c+d}=\dfrac{a+b}{d+e}=\dfrac{b+c}{e+a}$
早川学而「数学教育論文集」昭和54(1979)年
</td></tr></table>

（解）

(1) 条件より，$abc\neq 0$

巡回分数式の値をkとおくと，$b+c=ka, c+d=kb, a+b=kc$

これらの3式を辺々加えると　$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

移項すると　$(2-k)(a+b+c)=0$　　$\therefore k=2, a+b+c=0$

$a+b+c=0$のとき，$b+c=-a$であるから　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

よって　巡回分数式の値kは，$k=2,-1$・・・（答）

(2) 条件より，$abc\neq 0$

巡回分数式の値をkとおくと，$b=ka, c=kb, a=kc$

これらの3式を辺々掛けると　$abc=k^3abc$

両辺を$abc(\neq 0)$で割ると　$k^3=1$

よって，巡回分数式の値kは，$k=1,\omega,\omega^2$・・・（答）

（ωは1の虚数立方根で，$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$）

(3) 条件より，$abcd\neq 0$

巡回分数式の値をkとおくと，$a+b=kc\cdots$①$, b+c=kd\cdots$②$, c+d=ka\cdots$③$, d+a=kb\cdots$④

これらの4式を辺々加えると　$2(a+b+c+d)=k(a+b+c+d)$

移項すると　$(2-k)(a+b+c+d)=0$　　$\therefore k=2, a+b+c+d=0$

$a+b+c+d=0$に①，③を代入すると　$kc+ka=0, k(a+c)=0$　　$\therefore k=0, a=-c\cdots$⑤

$a+b+c+d=0$に②，④を代入すると　$kd+kb=0, k(b+d)=0$　　$\therefore k=0, b=-d\cdots$⑥

⑤，⑥をまとめると　$k=0$
$k\neq 0$のとき，$a=-c$かつ$b=-d\cdots$⑦

①に⑦を代入すると　$-c-d=kc$　　$\therefore d=-c(k+1)\cdots$⑧

同様に②は，$-d+c=kd$　　$\therefore c=d(k+1)\cdots$⑨

⑧，⑨を辺々掛けると　$cd=-cd(k+1)^2$

両辺を$cd(\neq 0)$で割ると　$1=-(k+1)^2$　$k+1=\pm i$　$\therefore k=-1\pm i$

よって求める巡回分数式の値kは，　$\therefore k=2,0,-1\pm i\cdots$（答）

(4) $\boxed{\text{注意}}$ HPに掲載されている問題は一部条件が抜けている。

条件より，$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)\neq 0$

巡回分数式の値をkとおくと，$c+d=k(a+b)$，$d+e=k(b+c)$，$e+a=k(c+d)$，$a+b=k(d+e)$，$b+c=k(e+a)$

これらの５式を辺々掛けると　$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)=k^5(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)$

両辺を$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)(\neq 0)$で割ると，$k^5=1$

移項して因数分解すると　$(k-1)(k^4+k^3+k^2+k+1)=0$　$\therefore k=1, k^4+k^3+k^2+k+1=0\cdots$①

ここで①の４次の相反（逆数）方程式を解くために，両辺を$k^2(\neq 0)$で割ると　$k^2+k+1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}=0$

変形すると　$\left(k+\frac{1}{k}\right)^2+\left(k+\frac{1}{k}\right)-1=0$　$\therefore k+\frac{1}{k}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$k^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}k+1=0$

[1]　$k^2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}k+1=0$のとき　$k=\dfrac{-\left(-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$

[2]　$k^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}k+1=0$のとき　$k=\dfrac{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i$

よって求める巡回分数式の値は，$k=1,\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i,-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i\cdots$（答）

（2018/5/19）

初等数学HP問題（18-02）

(1) ２乗すると下３桁に０以外の同じ数が並ぶような２桁の整数を求めよ。
(2) ３乗すると下４桁に０以外の同じ数が並ぶような３桁の整数を求めよ。

とりあえず答をBASICで求めてみた。

(1)

BASIC - [D:¥Documents_2017_01_02まで¥Math_all¥数...

ﾌｧｲﾙ(F)　編集(E)　実行(R)　ｵﾌﾟｼｮﾝ(O)　表示(W)　ﾍﾙﾌﾟ(H)

```
90 REM"2乗すると下3桁に0以外の同じ数が並ぶような2桁の整数"
100 LET n=9
110 LET n=n+1
120 IF n=100 THEN STOP
130 LET u=n^2
140 LET a=int(u/1000)
150 LET b=int(u/100)-10*a
160 LET c=int(u/10)-100*a-10*b
170 LET d=u-int(u/10)*10
180 IF (b-c)^2+(c-d)^2>0 THEN GOTO 110
190 IF d=0 THEN GOTO 110
200 PRINT n;"^2=";a;b;c;d
210 GOTO 110
    END
```

挿入　標準　F1 ヘルプ　F2 機能語一覧　F9 実行

D:¥Documents_2017_01_02まで¥Math_all¥数学問...

ﾌｧｲﾙ(F)　編集(E)　中断(R)　表示(W)　ｵﾌﾟｼｮﾝ(O)

```
38 ^2= 1  4  4  4
```

これを実行すると，右側となる。

(2)

BASIC - [D:¥Documents_2017_01_02まで¥Math_all¥数学問...

ﾌｧｲﾙ(F)　編集(E)　実行(R)　ｵﾌﾟｼｮﾝ(O)　表示(W)　ﾍﾙﾌﾟ(H)

```
90 REM "3乗すると下4桁に0以外の同じ数が並ぶような3桁の整数"
100 LET n=99
110 LET n=n+1
120 IF n=1000 THEN STOP
130 LET u=n^3
140 LET a=INT(u/10^8)
150 LET b=int(u/10^7)-10*a
160 LET c=INT(u/10^6)-100*a-10*b
170 LET d=INT(u/10^5)-1000*a-100*b-10*c
180 LET e=INT(u/10^4)-10^4*a-1000*b-100*c-10*d
190 LET f=INT(u/1000)-10^5*a-10^4*b-1000*c-100*d-10*e
200 LET g=INT(u/100)-10^6*a-10^5*b-10^4*c-1000*d-100*e-10*f
210 LET h=INT(u/10)-10^7*a-10^6*b-10^5*c-10^4*d-1000*e-100*f-10*g
220 LET i=u-INT(u/10)*10
230 IF (f-g)^2+(g-h)^2+(h-i)^2>0 THEN GOTO 110
240 IF i=0 THEN GOTO 110
250 PRINT n;"^3=";a;b;c;d;e;f;g;h;i
260 GOTO 110
    END
```

挿入　標準　F1 ヘルプ　F2 機能語一覧　F9 実行

D:¥Documents_2017_01_02まで¥Math_all¥数学問...

ﾌｧｲﾙ(F)　編集(E)　中断(R)　表示(W)　ｵﾌﾟｼｮﾝ(O)

```
753 ^3= 4  2  6  9  5  7  7  7  7
```

これを実行すると，右側となる。

（補足）プログラムを少し修正すると，次の結果が得られる。

[1]　(2)で，3乗すると下4桁以外に0以外の同じ数が4個並ぶような3桁の整数は，$924^3 = 788889024$

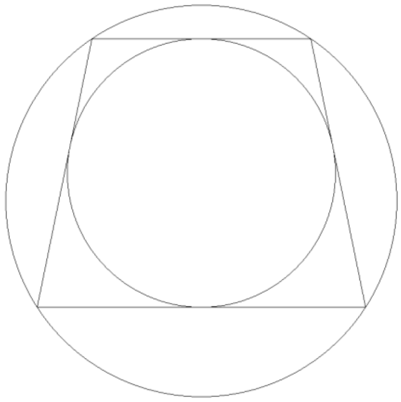
[2]　4乗すると下5桁に0以外の同じ数が並ぶような4桁の整数はない。
しかし，下5桁以外に0以外の同じ数が5個並ぶような4桁の整数は3通りある。

①　$3861^4 = 222228219397041$，②　$5431^4 = 869999916969121$，③　$9036^4 = 6666607537295616$

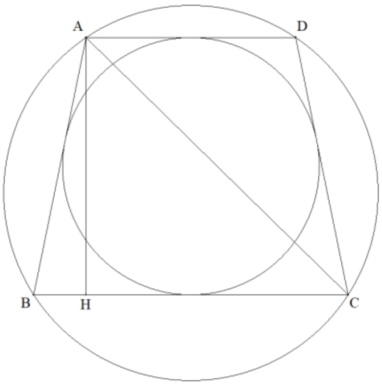
(2018/5/12)

初等数学 HP 問題（18-03）

上底と下底の長さの比が 2：3 の等脚台形に内接円があるとき，内接円と外接円の半径の比を求めよ。



（解）図のように，等脚台形を ABCD とおき，A から BC に下した垂線の足を H とする。



内接円と外接円の半径をそれぞれ r, R とおく。

上底と下底の長さの比を $k:l$ とし，AD= ka ，BC= la とおく。$(k, l, a>0)$

四角形は円に外接するから，AB＋CD＝AD+BC

等脚台形なので，AB＝CD より　AB＝ $\dfrac{AD+BD}{2}=\dfrac{ka+la}{2}=\dfrac{k+l}{2}a$

また，BH＝ $\dfrac{BC-AD}{2}=\dfrac{la-ka}{2}=\dfrac{l-k}{2}a$

△ABH に三平方の定理を適用して　AH＝ $2r=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{k+l}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{l-k}{2}a\right)^2}=\sqrt{kl}a \quad \therefore r=\dfrac{\sqrt{kl}}{2}a \cdots$①

トレミーの定理より　$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$　また，等脚台形であるから，AC=BD，AB＝CD

$AC^2=AB^2+AD\cdot BC=\left(\dfrac{k+l}{2}a\right)^2+ka\cdot la=\dfrac{k^2+6kl+l^2}{4}a^2$　$AC>0$ より　$AC=\dfrac{\sqrt{k^2+6kl+l^2}}{2}a$

△ABC＋△DAC＝等脚台形 ABCD であるから　$\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B+\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin(180°-B)=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot AH$

$\sin(180°-B)=\sin B$ であるから　$\sin B=\dfrac{(AD+BC)\cdot AH}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\dfrac{(ka+la)\sqrt{kl}a}{\dfrac{k+l}{2}a\cdot la+ka\cdot\dfrac{k+l}{2}a}=\dfrac{2\sqrt{kl}}{k+l}$

△ABC に正弦定理を適用すると　$2R=\dfrac{AC}{\sin B}$ より　$R=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{k^2+6kl+l^2}}{2}a}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{kl}}{k+l}}=\dfrac{(k+l)\sqrt{k^2+6kl+l^2}}{8\sqrt{kl}}a\cdots$②

①，②より　$r:R=\dfrac{\sqrt{kl}}{2}a:\dfrac{(k+l)\sqrt{k^2+6kl+l^2}}{8\sqrt{kl}}a=4kl:(k+l)\sqrt{k^2+6kl+l^2}$　（公式）

これに，$k=2, l=3$ を代入すると　$r:R=4\cdot2\cdot3:(2+3)\sqrt{2^2+6\cdot2\cdot3+3^2}=24:35\cdots$（答）

（2018/5/16）

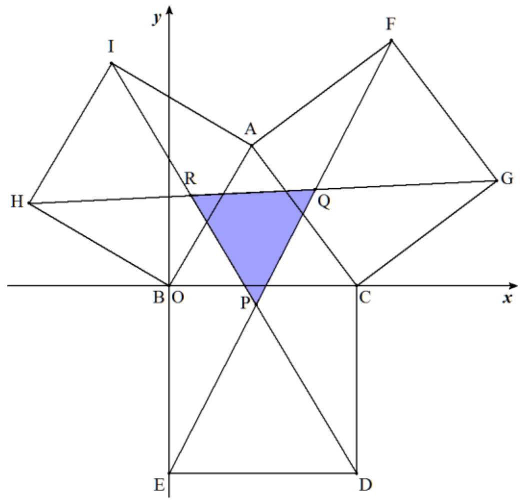
初等数学 HP 問題（17-06）

$\mathrm{A}\left(c\cos B, c\sin B\right)$，$\mathrm{B}\left(0,0\right)$，$\mathrm{C}\left(a,0\right)$とおいて，△ABC を右図のように座標平面上において考える。

また，ID と FE，FE と HG，HG と ID との交点をそれぞれ P，Q，R とする。

$\mathrm{D}\left(a,-a\right)$，$\mathrm{E}\left(0,-a\right)$は容易にわかる。

F と I の座標は加法定理を利用する。



$$\mathrm{F}\left(a+\sqrt{2}b\cos\{180^\circ-(45^\circ+C)\},\sqrt{2}b\sin\{180^\circ-(45^\circ+C)\}\right)$$

$$\therefore\left(a+b(\sin C-\cos C),b(\sin C+\cos C)\right)$$

$$\mathrm{G}\left(a+b\cos\{180^\circ-(90^\circ+C)\},b\sin\{180^\circ-(90^\circ+C)\}\right)$$

$$\therefore\left(a+b\sin C,b\cos C\right),$$

$$\mathrm{H}\left(c\cos(B+90^\circ),c\sin(B+90^\circ)\right)\quad\therefore\left(-c\sin B,c\cos B\right),$$

$$\mathrm{I}\left(\sqrt{2}c\cos(B+45^\circ),\sqrt{2}c\sin(B+45^\circ)\right)\quad\therefore\left(c(\cos B-\sin B),c(\cos B+\sin B)\right)$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とおき，余弦定理，面積の公式から，

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\quad\sin B=\frac{2S}{ca},\quad\sin C=\frac{2S}{ab}$$

を各座標に代入して，3 つの線分の方程式を求めると，

線分 ID：$(3a^2-b^2+c^2+4S)x+(a^2+b^2-c^2+4S)y-2a(a^2-b^2+c^2)=0$

線分 FE：$(3a^2+b^2-c^2+4S)x-(a^2-b^2+c^2+4S)y-a(a^2-b^2+c^2+4S)=0$

線分 HG：$2(b^2-c^2)x-2(a^2+4S)y+a(a^2-b^2+c^2+4S)=0$

これらを 3 直線でつくられる三角形の面積の公式（*）に代入して計算すると，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{16a^2S^2}{3a^4+b^4-2b^2c^2+c^4+16a^2S+16S^2}$$

分母に，$16S^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ を代入して整理すると

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{16a^2S^2}{2a^2(a^2+b^2+c^2)+16a^2S}=\frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2+8S}\cdots\text{（答）}$$

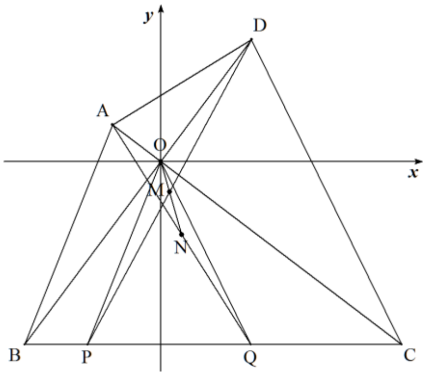
（補足）△ABC の Brocard 角を ω とすると，$\dfrac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\dfrac{2}{\cot\omega+2}$ と表すことができる。

【例】$a=5,b=4,c=3$ のとき，$S=6$ であるから，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{144}{49}$

(*) 証明は，時岡郁夫の HP のこだわり数学 75.「 3 直線でつくられる三角形の面積(PDF)」にある。
(http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/)

(2017/11/30)

初等数学 HP 問題（17-02）



凸四角形 ABCD を座標平面上におき，ベクトルで考える。

a,b,c を正の定数として，$\mathrm{O}(0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{OC}=(c,-b)$ とおく。

$m>1, n>1$ として，A は CO を $m:(m-1)$ に外分する点，D は BO を $n:(n-1)$ に外分する点とすると，

$$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{-(m-1)c}{m-(m-1)},\frac{-(m-1)(-b)}{m-(m-1)}\right)=(-c(m-1),b(m-1))$$

$$\overrightarrow{OD}=\left(\frac{-(n-1)(-a)}{n-(n-1)},\frac{-(n-1)(-b)}{n-(n-1)}\right)=(a(n-1),b(n-1))$$

OP // AB より，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{AB}$ とかける。（$k>0$）

$\mathrm{P}(p,-b)$ とおくと，$(p,-b)=k(-a-\{-c(m-1)\},-b-b(m-1))=k(-a+c(m-1),-bm)$

y 成分を比較すると，$k=\dfrac{1}{m}$ より，$p=\dfrac{-a+c(m-1)}{m}$ $\quad\therefore \overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{-a+c(m-1)}{m},-b\right)$

同様に，OQ // DC より，$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{DC}$ とかける。（$l>0$）

$\mathrm{Q}(q,-b)$ とおくと，$(q,-b)=l(c-a(n-1),-b-b(n-1))=l(c-a(n-1),-bn)$

y 成分を比較すると，$l=\dfrac{1}{n}$ より，$q=\dfrac{c-a(n-1)}{n}$ $\quad\therefore \overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{c-a(n-1)}{n},-b\right)$

$$\left|\overrightarrow{BP}\right|=\left|\frac{-a+c(m-1)}{m}-(-a)\right|=\left|\frac{(a+c)(m-1)}{m}\right|,\quad \left|\overrightarrow{CQ}\right|=\left|\frac{c-a(n-1)}{n}-c\right|=\left|\frac{(a+c)(n-1)}{n}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\frac{c-a(n-1)}{n}-\frac{-a+c(m-1)}{m}\right|=\left|\frac{(a+c)(m+n-mn)}{mn}\right|$$

これらを，BP²＋CQ²＝PQ² に代入すると

$$\left\{\frac{(a+c)(m-1)}{m}\right\}^2+\left\{\frac{(a+c)(n-1)}{n}\right\}^2=\left\{\frac{(a+c)(m+n-mn)}{mn}\right\}^2$$

両辺に $\left(\dfrac{mn}{a+c}\right)^2$ を掛けると，$\{n(m-1)\}^2+\{m(n-1)\}^2=(m+n-mn)^2$

展開して整理すると，$m^2n^2=2mn$

$mn\neq 0$ より，$n=\dfrac{2}{m}$

このとき，$\overrightarrow{OD}=\left(a\left(\dfrac{2}{m}-1\right),b\left(\dfrac{2}{m}-1\right)\right)=\dfrac{2-m}{m}(a,b)$，$\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{c-a\left(\dfrac{2}{m}-1\right)}{\dfrac{2}{m}},-b\right)=\left(\dfrac{(a+c)m}{2}-a,-b\right)$ となる。

M は DP の中点であるから

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{a(2-m)}{m}+\frac{-a+c(m-1)}{m}\right\},\frac{1}{2}\left\{\frac{b(2-m)}{m}-b\right\}\right)=\frac{m-1}{2m}(c-a,-2b)\cdots①$$

N は AQ の中点であるから

$$\overrightarrow{ON}=\left(\frac{1}{2}\left\{-c(m-1)+\frac{(a+c)m}{2}-a\right\},\frac{1}{2}\{b(m-1)-b\}\right)=\frac{2-m}{4}(c-a,-2b)\cdots②$$

①，②より　$\overrightarrow{OM}=\dfrac{m-1}{2m}\times\dfrac{4}{2-m}\times\dfrac{2-m}{4}(c-a,-2b)=\dfrac{2(m-1)}{m(2-m)}\overrightarrow{ON}=\dfrac{n(m-1)}{m(n-1)}\overrightarrow{ON}$

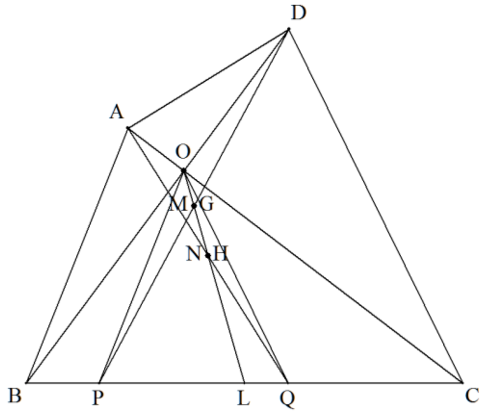
よって，3 点 O，M，N は一直線上にある。■

（2017/11/10）

初等数学 HP 問題（17-02）＜別解＞

BC の中点を L とし，OL と PD，QA との交点をそれぞれ G，H とする。

BP＝p，PQ＝r，QC=q とおくと，仮定より， $p^2+q^2=r^2\cdots$①



また，BL＝$\dfrac{p+q+r}{2}$ ，PL=$\dfrac{-p+q+r}{2}$ である。

OQ // DC より，BO : OD＝BQ : QC＝$(p+r):q$ である。

△BPD と線分 OL についてメネラウスの定理より， $\dfrac{PG}{GD}\cdot\dfrac{DO}{OB}\cdot\dfrac{BL}{LP}=1\cdots$②

ここで， $\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{q}{p+r},\dfrac{BL}{LP}=\dfrac{\dfrac{p+q+r}{2}}{\dfrac{-p+q+r}{2}}=\dfrac{p+q+r}{-p+q+r}$

であるから，②より

$$\frac{PG}{GD}=\frac{(p+r)(-p+q+r)}{q(p+q+r)}=\frac{(p+r)(-p+q+r)}{q(p+r)+q^2}=\frac{(p+r)(-p+q+r)}{q(p+r)+r^2-p^2}$$ （∵①より $q^2=r^2-p^2$）

$$=\frac{(p+r)(-p+q+r)}{(p+r)(-p+q+r)}=1$$

∴PG＝GD となり，G は DP の中点となり，M と一致する。
同様に，H は AQ の中点となり N と一致する。
よって，M，N は OL 上の点であるから，3 点 O，M，N は一直線上にある。■

（2017 年 11 月　立命館慶祥中学校 3 年　髙橋慶多君）