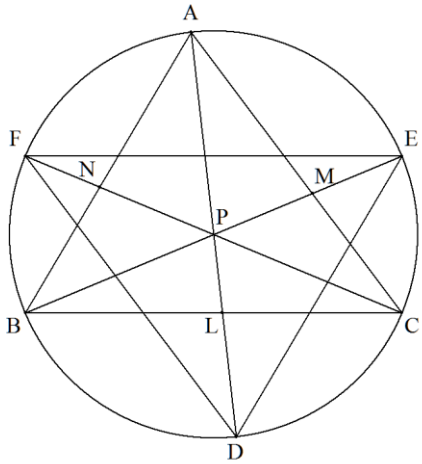
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

△ABC の外接円に内接する種々の△DEF について，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値



点 P を△ABC 内の点とし，AP，BP，CP をそれぞれ延長し，△ABC の外接円との交点をそれぞれ D，E，F とする。また，AD と BC，BE と CA，CF と AB との交点をそれぞれ L，M，N とする。次の各々の点 P に対して，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を 3 辺 a,b,c と $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ を用いて表せ。ただし，(7)については，$S=\triangle ABC$ の使用も可とする。

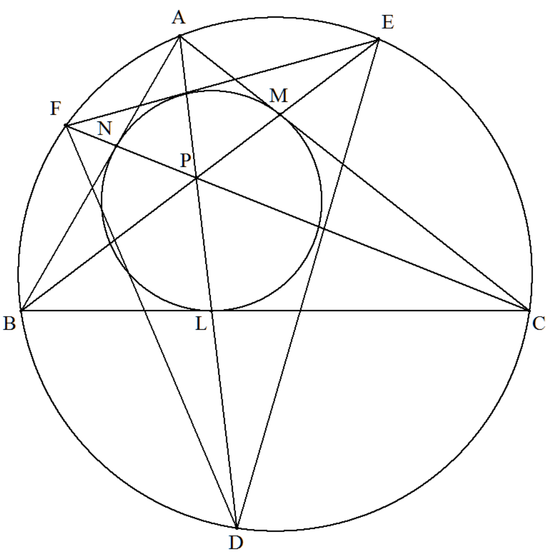
(1) 点 P は外心
(2) 点 P は重心
(3) 点 P は内心
(4) 点 P は垂心
(5) 点 P は Gergonne（ジェルゴンヌ）点。AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）
(6) 点 P は Nagel（ナーゲル）点。AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）
(7) 点 P は Fermat（フェルマー）点。∠BPC＝∠CPA＝∠APB を満たす。
(8) 点 P は第 1Brocard（ブロカール）点。∠PAB＝∠PBC＝∠PCA を満たす。（なお，∠PAC＝∠PBA＝∠PCB を満たす点 P を第 2Brocard 点という。）
(9) 点 P は Lemoine（ルモワーヌ）点。△ABC において，中線を角の二等分線に関して折り返した 3 つの直線は 1 点 P で交わる。（この点を類似重心ともいう。）

1　はじめに

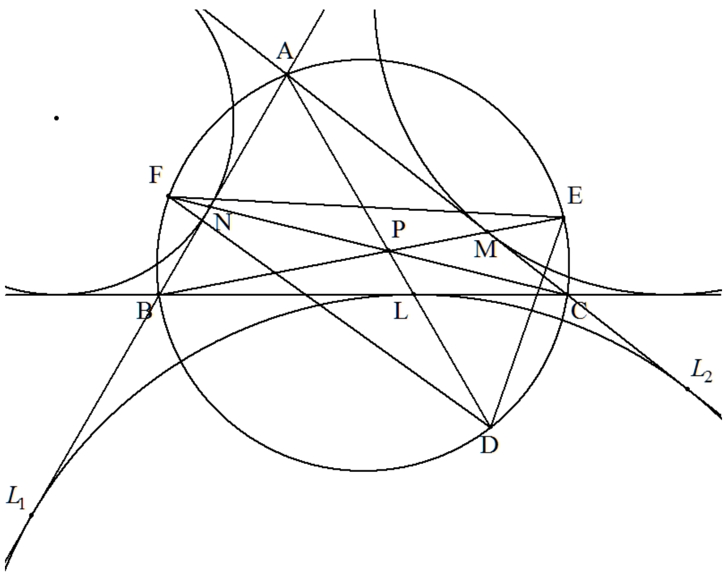
この問題の(1)から(4)までは，2017 年 11 月 6 日に本校の中 3 生・T 君から出題され，翌日，解答を渡した。この問題を参考に(5)～(9)を追加した。(1)～(9)までの解答例は，A4 サイズで 14～15 ページになるので，求め方を紹介する。実際の解答例は HP を参照のこと。

＜参考図＞

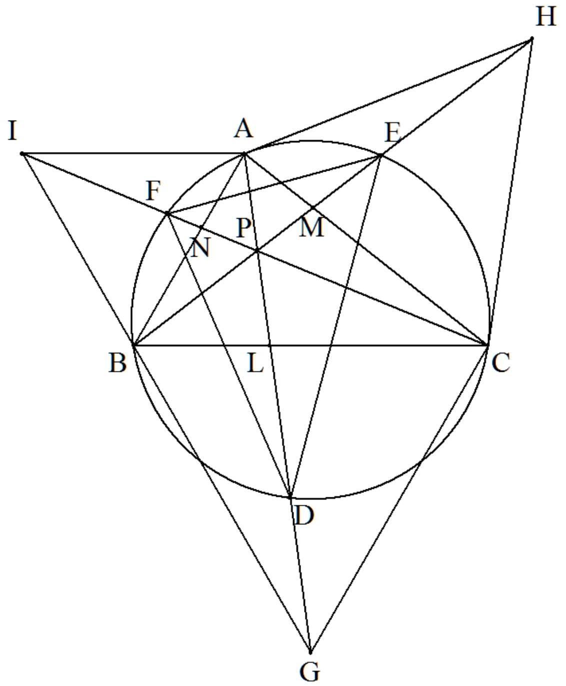
(5)　Gergonne 点



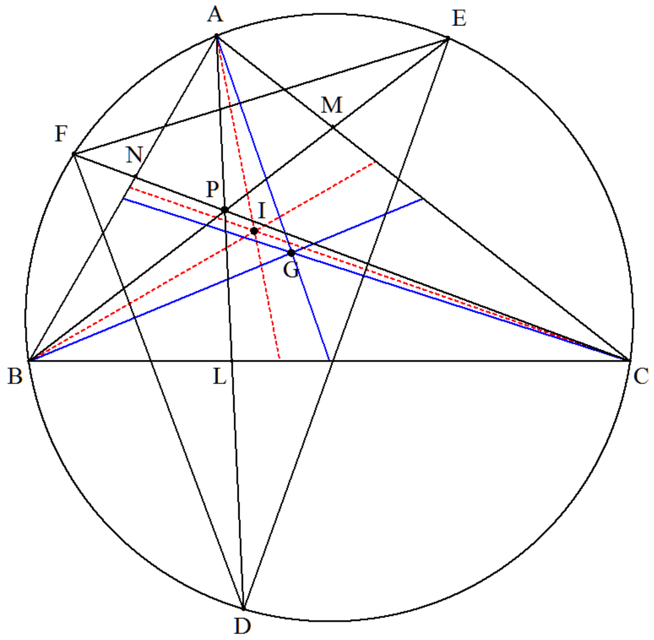
(6)　Nagel 点



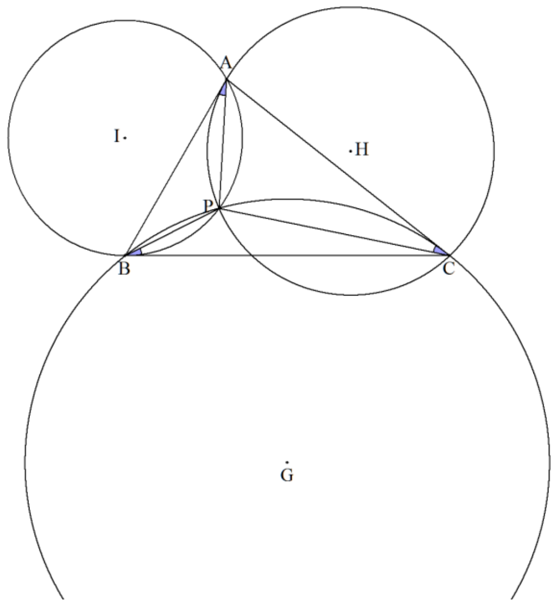
(7)　Fermat 点

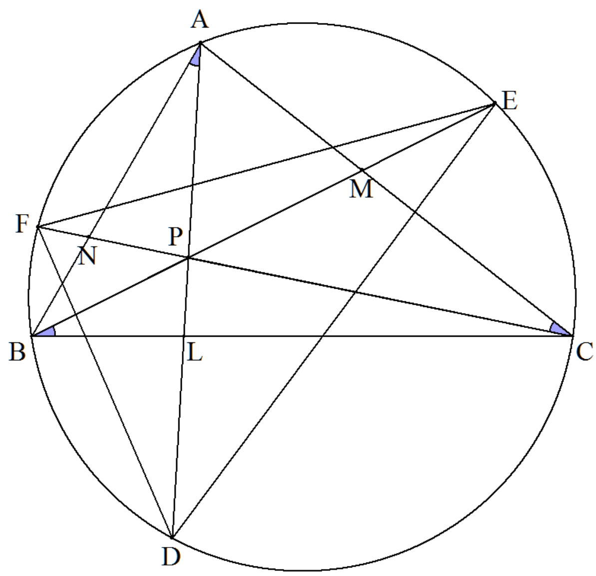


(9) Lemoine 点（G：重心，I：内心）



(8)　Brocard 点の作図と問題図





2　求め方

△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE である。

ここで，△PEF の求め方は次の 2 通りが一般的。

[1]　△PEF＝$\frac{1}{2}PE\cdot PF\sin\angle EPF$

[2]　△PEF＝$\frac{PE^2}{PC^2}$△PCB（∵△PEF∽△PCB より△PEF：△PCB＝PE^2：PC^2 であるから）

（求め方）予め，AL＝l，BM=m，CN＝n とおいておく。

i.　メネラウスの定理で，AP：PL を求めると，AP，PL，△PBC：△ABC が求められる

ii.　方べきの定理で LD を求めると，PD=PL+LD。

iii.　$\sin\angle EPF$ の値は点 P の種類によって求め方は様々である。

PD が求められると，PE，PF は a,b,c をローテーションして求めることができる。

また，AP が求められると CP も a,b,c をローテーションして求めることができる。

実際，種々の場合について，次のように求めた。

[1]の方法	(3)内心，(4)垂心，(7)Fermat 点，(8)Brocard 点
[2]の方法	(2)重心，(5)Gergonne 点，(6)Nagel 点，(9)Lemoine 点（類似重心）

3　$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値一覧

△ABC 内に点 P をとり，AP，BP，CP を延長し，△ABC の外接円との交点をそれぞれ D，E，F とする。
また，AD と BC，BE と CA，CF と AB の交点をそれぞれ L，M，N とする。

点 P	$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値（a,b,c,s,S を用いて）ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}, S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$R$ は△ABC の外接円の半径，r は内接円の半径とする。
(1) 外心	1
(2) 重心	$\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$
(3) 内心	$\dfrac{R}{2r}=\dfrac{abc}{8(s-a)(s-b)(s-c)}$
(4) 垂心（鋭角三角形の場合）	$8\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$
(5) Gergonne(ジェルゴンヌ)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）	$\dfrac{16(R+r)^3S^2}{R\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}=\dfrac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}$
(6) Nagel(ナーゲル)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）	$\dfrac{16(R-r)^3S^2}{R\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}=\dfrac{\{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}$
(7) Fermat(フェルマー)点（どの角も 120° 未満の場合）∠BPC＝∠CPA＝∠APB	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)$ AP＝x，BP=y，CP＝z とおくと，$xyz\left(\dfrac{x+y+z}{yz+zx+xy}\right)^3$
(8) 第 1Brocard(ブロカール)点 ∠PAB＝∠PBC＝∠PCA	1
(9) Lemoine(ルモワーヌ)点（類似重心）	$\dfrac{27a^2b^2c^2}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$

$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値の例

（1）$a=8, b=7, c=5$ のとき，$s=10, S=10\sqrt{3}$ であるから，

(1)1，(2) $\dfrac{24334}{20167}$，(3) $\dfrac{7}{6}$，(4) $\dfrac{22}{49}$，(5) $\dfrac{400000}{397537}$，(6) $\dfrac{256}{273}$，(7)1，(8)1，(9) $\dfrac{2800}{2881}$

（2） $a=5, b=4, c=3$ のとき， $s=6, S=6$ であるから，

(1)1，(2) $\frac{1250}{949}$，(3) $\frac{5}{4}$，(4)0，(5) $\frac{12348}{12325}$，(6) $\frac{27}{25}$，(7) $\frac{48+25\sqrt{3}}{96}$，(8)1，(9) $\frac{972}{949}$

4　$\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値一覧

$BL=a_1, CM=b_1, AN=c_1$ として， $\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\frac{2a_1b_1c_1}{abc}$ を用いると簡単。

点 P	$\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値（a,b,c,s,S を用いて） ただし， $s=\frac{a+b+c}{2}, S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$， R は△ABC の外接円の半径， r は内接円の半径とする。
(1) 外心	$\frac{2a^2b^2c^2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{\{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\}\{b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2\}\{c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2\}}$
(2) 重心	$\frac{1}{4}$
(3) 内心	$\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
(4) 垂心（鋭角三角形の場合）	$2\cos A\cos B\cos C=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}$
(5) Gergonne(ジェルゴンヌ)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）	$\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\frac{r}{2R}$
(6) Nagel(ナーゲル)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）	$\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\frac{r}{2R}$
(7) Fermat(フェルマー)点（どの角も 120° 未満の場合） ∠BPC＝∠CPA＝∠APB	$\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}{4\left(a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}$ AP＝x，BP=y，CP＝z とおくと， $\frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$
(8) 第 1Brocard(ブロカール)点 ∠PAB＝∠PBC＝∠PCA	$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$
(9) Lemoine(ルモワーヌ)点（類似重心）	$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$

$\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値の例

（1） $a=8, b=7, c=5$ のとき， $s=10, S=10\sqrt{3}$ であるから，

(1) $\frac{2156}{11999}$，(2) $\frac{1}{4}$，(3) $\frac{28}{117}$，(4) $\frac{11}{98}$，(5) $\frac{3}{14}$，(6) $\frac{3}{14}$，(7) $\frac{1600}{15041}$，(8) $\frac{78400}{372109}$，(9) $\frac{78400}{372109}$

（2） $a=5, b=4, c=3$ のとき， $s=6, S=6$ であるから，

(1) 0，(2) $\frac{1}{4}$，(3) $\frac{5}{21}$，(4) 0，(5) $\frac{1}{5}$，(6) $\frac{1}{5}$，(7) $\frac{9756-4750\sqrt{3}}{16021}$，(8) $\frac{144}{697}$，(9) $\frac{144}{697}$

5　最後に

この一連の問題は，総合問題として最適である。例えば，(9)の Lemoine 点の場合は，中線定理，正弦定理，余弦定理，メネラウスの定理，方べきの定理，辺の比と面積比などを用いる。