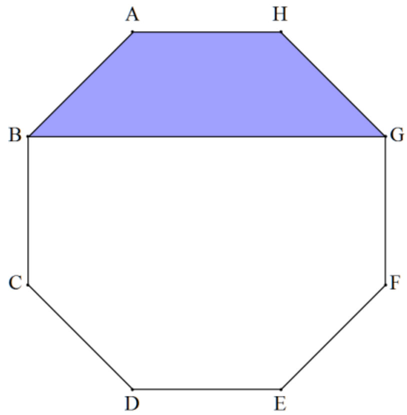
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

正九角形内のある台形の面積について

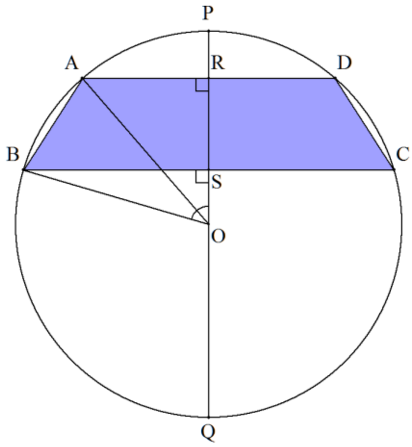
1　はじめに

2017年9月，民法TV番組で中学生のクイズ日本一が放映された（番組名は正確ではない）。その中で，数学オリンピック2連覇の中学生が紹介されていた。密着の中で，その中学生はある問題を考えていた。リポーターが何を考えているか質問をすると，
「正八角形の面積が100cm²のとき，網掛けの台形（右図）の面積を求める問題」であった。
その問題の解答は，放映されなかったので，自分なりに考えてみた。



2　補題

半径1の円Oに，AD // BCである台形ABCDが内接している。ADと垂直な直径PQとAD，BCとの交点をそれぞれR，S，∠POA＝α，∠POB＝βとおくとき，



$$\text{台形ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)RS = \frac{1}{2}(2\sin\alpha + 2\sin\beta)(\cos\alpha - \cos\beta)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\times(-2)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin(\beta-\alpha)$$
$$= \{1-\cos(\alpha+\beta)\}\sin(\beta-\alpha) = T(\alpha,\beta)$$ とおく。

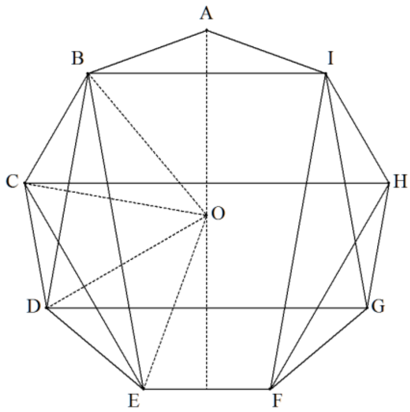
＜T:*Trapezoid*（台形）の頭文字＞

3　正九角形内のある台形の面積について

正八角形の問題にヒントを得て，正九角形にも面積比が整数になる台形があるかどうか調べてみた。

正九角形ABCDEFGHIの外接円の中心をO，OA＝1，∠AOB＝$\dfrac{360°}{9} = 40°$，正九角形の面積をSとすると，

$S = 9\times\left(\dfrac{1}{2}\times 1^2\sin\dfrac{360°}{9}\right) = \dfrac{9}{2}\sin 40°$ である。$\left(\sin 40° = \dfrac{2}{9}S\right)$



異なる台形は，BCHI，BDGI，BEFI，CDGH，CEFH，DEFGの6通り考えられる。

(1)　$\text{台形BCHI} = \dfrac{1}{2}(BI+CH)JK = T(40°,80°) = (1-\cos 120°)\sin 40°$

$= \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{9}S = \dfrac{1}{3}S$　（適）

(2)　$\text{台形BDGI} = T(40°,120°) = (1-\cos 160°)\sin 80° = (1+\cos 20°)\times 2\sin 40°\cos 40°$

$= \dfrac{4(1+\cos 20°)\cos 40°}{9}S$　（不適）

(3) 台形BEFI $= T(40°,160°) = (1-\cos 200°)\sin 120° = (1+\cos 20°)\times(3\sin 40° - 4\sin^3 40°)$

$= \dfrac{2(1+\cos 20°)(3-4\sin^2 40°)}{9}S = \dfrac{2(1+\cos 20°)(1+2\cos 80°)}{9}S$ （不適）

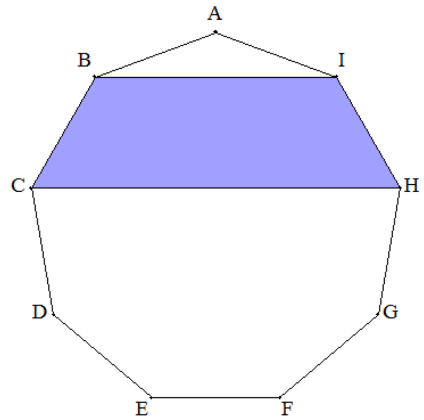
(4) 台形CDGH $= T(80°,120°) = (1-\cos 200°)\sin 40° = \dfrac{2(1+\cos 20°)}{9}S$ （不適）

(5) 台形CEFH $= T(80°,160°) = (1-\cos 240°)\sin 80° = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times 2\sin 40°\cos 40° = \dfrac{2\cos 40°}{3}S$ （不適）

(6) 台形DEFG $= T(120°,160°) = (1-\cos 280°)\sin 40° = (1-\cos 80°)\sin 40° = \dfrac{2(1-\cos 80°)}{9}S$ （不適）

この計算結果から作成したのが，次の問題である。また，その証明は中学生レベルでできる。

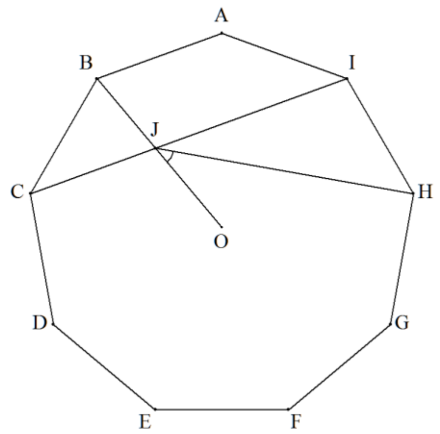
問題1　正九角形ABCDEFGHIと台形BCHIの面積比が3：1となることを証明せよ。



※証明は趣味の数学問題集A372(2)を参照のこと。

上の**問題1**を中学生レベルでできないか考えている過程で，次の証明問題が得られた。この証明も中学生レベルできる。

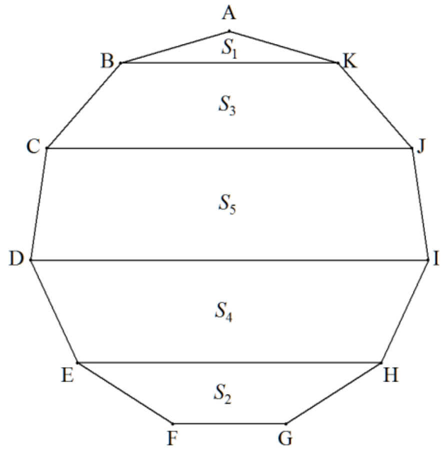
問題2　正九角形ABCDEFGHIの外接円の中心をOとし，OBとCIの交点をJとするとき，∠OJH＝40°となることを証明せよ。



※証明は趣味の数学問題集A373を参照のこと。

同様に，正七角形，正十角形，正12角形，･･･の場合を考えてみた。（省略）

4　正11角形内のある台形の面積について



結論だけを述べると，どの台形の面積も正11角形の面積と整数比になることはない。ところが，面白い結果が得られた。

$$\triangle \mathrm{ABK}=\frac{1}{2}BK\cdot AL=\frac{1}{2}\times 2\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)$$

$$=\sin 2\theta\times 2\sin^2\theta=\frac{4\sin^2\theta}{11}S$$ である。

△ABK，台形EFGH，BCJK，DEHJ，CDIJの面積を順に S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 とおくと，

$$S_1:S_2:S_3:S_4:S_5=\sin^2\theta:\sin^2 2\theta:\sin^2 3\theta:\sin^2 4\theta:\sin^2 5\theta$$

となる。（ただし，$\theta=\dfrac{\pi}{11}$）

蛇足だが，$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=S$ であるから，$\left(\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\sin^2 4\theta+\sin^2 5\theta\right)\times\dfrac{4}{11}S=S$ より，次の問題が得られる。

問題3　$\theta=\dfrac{\pi}{11}$ のとき，$\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\sin^2 4\theta+\sin^2 5\theta=\dfrac{11}{4}$ を証明せよ。

（証明）左辺

$$=\sum_{k=1}^{5}\sin^2 k\theta=\sum_{K-1}^{5}\frac{1-\cos 2k\theta}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{2\cos 2k\theta\sin 2\theta}{2\sin 2\theta}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{\sin 2(k+1)\theta-\sin 2(k-1)\theta}{2\sin 2\theta}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{(\sin 4\theta-\sin 0)+(\sin 6\theta-\sin 2\theta)+(\sin 8\theta-\sin 4\theta)+(\sin 10\theta-\sin 6\theta)+(\sin 12\theta-\sin 8\theta)}{4\sin 2\theta}$$

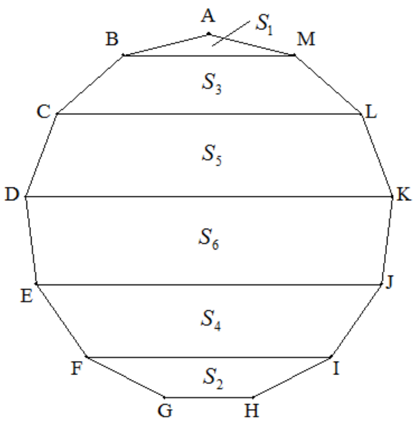
$$=\frac{5}{2}-\frac{-\sin 2\theta+\sin\theta-\sin\theta}{4\sin 2\theta}=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=\text{右辺}\quad\blacksquare$$

と正11角形の図を使わなくても証明できる。しかし，正11角形を5つに分割した図に関係している。

一般に，正 $2m+1$ 角形，正 $2m$ 角形を分割した台形（隣り合う点を頂点にもつ）の面積は次の通りである。

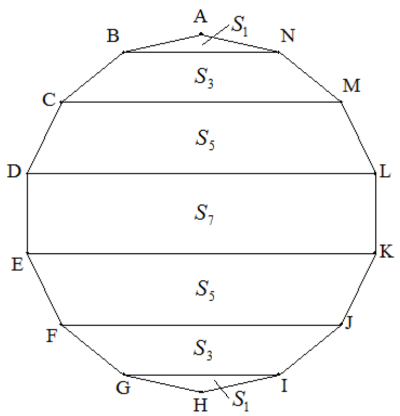
$$S_k=2\sin^2 k\theta\sin 2\theta=\frac{4\sin^2 k\theta}{n}S\quad\left(\theta=\frac{\pi}{n}\right)$$

正 n 角形（$n=2m+1$）の場合



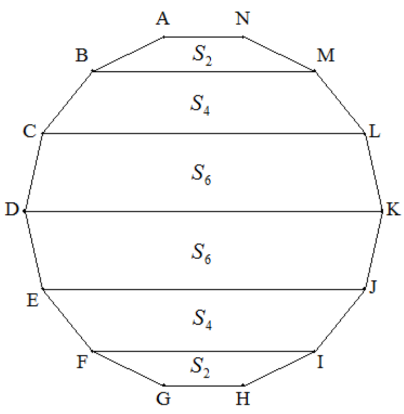
（図は，$n=13$ の場合）

正 n 角形（$n=2m$）の場合



（図は，$n=14$ の場合）

正 n 角形（$n=2m$）の場合



（図は，$n=14$ の場合）

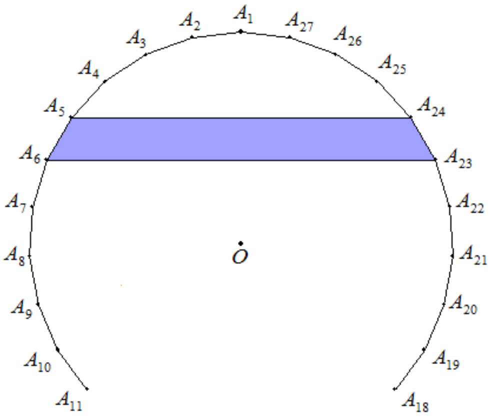
5　終わりに

TV番組の正八角形をきっかけに，はじめに正九角形について調べた。問題1，問題2の証明（中学生レベル）にはてこずったが，一応できた。

同じような性質（整数比）がないか，正七角形，正十角形，正12角形，正11角形などの場合についても調べみた。

次は，最後に考えた問題

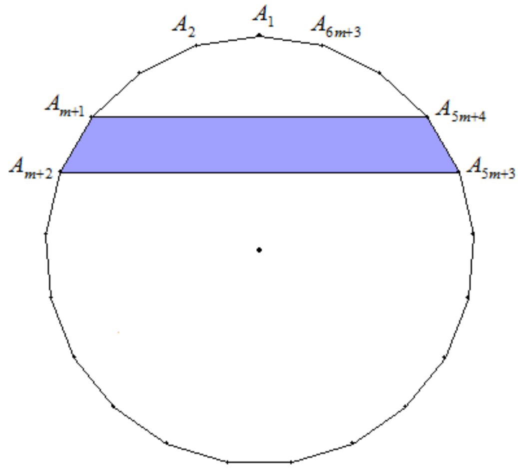
問題4　正27角形 $A_1A_2\cdots A_{27}$ と台形 $A_5A_6A_{23}A_{24}$ の面積比が9：1となることを証明せよ。



証明は，補題を用いると簡単。（中学生レベルでは難しい!?）

（結論）　正奇数角形の場合について

一般に，正 $(6m+3)$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{6m+3}$ と台形 $A_{m+1}A_{m+2}A_{5m+3}A_{5m+4}$ の面積比は $(2m+1):1$ である。$(m=1,2,\cdots)$



【参考文献】

［1］　趣味の数学問題集　A 問題 372，373
http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/tokioka_mondai/index.html

［2］　こだわり数学　83. 正九角形内のある台形の面積について(PDF)
http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/math/math_index.html
（tokioka で検索すると，時岡郁夫の HP が見つかる）