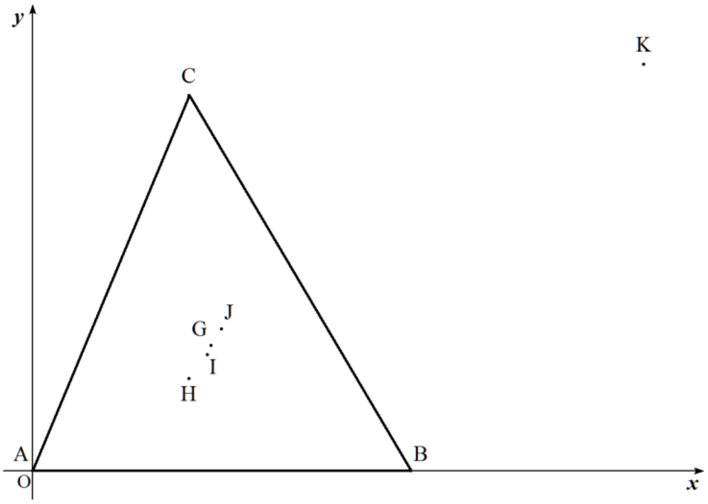
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

三角形の五心間のそれぞれの距離について

1　問題設定

三角形 ABC の五心である重心，垂心，内心，外心，傍心（代表して，∠A 内の傍心）について，それぞれの 2 点間の距離を求める。${}_5C_2=10$ であるから，10 通りの長さを計算することになる。単純計算（2 点間の距離の公式）で求められるように，座標平面で考える。



$\mathrm{A}(0,0)$，$\mathrm{B}(c,0)$，$\mathrm{C}(b\cos A, b\sin A)$とおく。

$\dfrac{a+b+c}{2}=s$ とおき，余弦定理と面積の公式（ヘロンの公式）より，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin A=\frac{2S}{bc}=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$$

であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c},\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}\right)$$ となる。

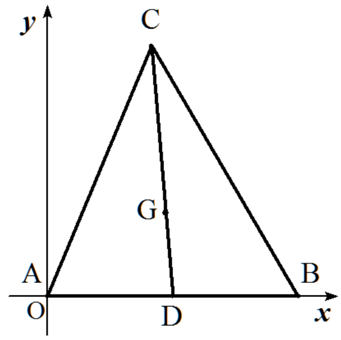
また，△ABC の内接円，外接円の半径をそれぞれr, R とおく。

2　五心の各座標について

いま，重心，垂心，内心，外心，∠A 内の傍心をそれぞれ，$\mathrm{G}(x_1,y_1)$，$\mathrm{H}(x_2,y_2)$，$\mathrm{I}(x_3,y_3)$，$\mathrm{J}(x_4,y_4)$，$\mathrm{K}(x_5,y_5)$とおく。また，AB の中点を $\mathrm{D}\left(\dfrac{c}{2},0\right)$，I，K から AB に下ろした垂線の足をそれぞれ E，F とする。

(1)　重心

G は中線 CD を 2:1 に内分する点であるから



$$x_1=\frac{1\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}+2\times\dfrac{c}{2}}{2+1}=\frac{b^2+3c^2-a^2}{6c}$$

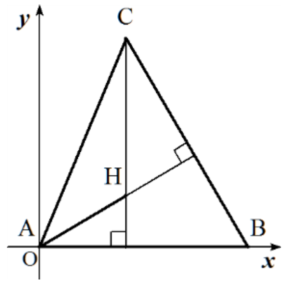
$$y_1=\frac{1\times\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}+2\times 0}{2+1}$$
$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{6c}$$

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{b^2+3c^2-a^2}{6c},\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{6c}\right)$

(2)　垂心

直線 AH は，点 A（原点）を通り，BC に垂直であるから，その方程式は

$$y=-\frac{c-b\cos A}{0-b\sin A}x=\frac{c-b\cos A}{b\sin A}x\cdots①$$



H の x 座標は C と同じだから，$x_2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，

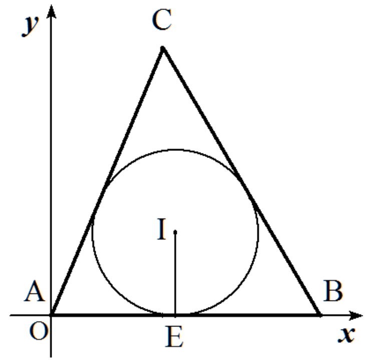
H の y 座標は，①より

$$y_2=\frac{c-b\cos A}{b\sin A}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{2c^2-2abc\cos A}{2bc\sin A}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4S}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2c\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

よって，$\mathrm{H}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c},\dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2c\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}\right)$

(3)　内心



x_3 ＝AE$=s-a=\dfrac{-a+b+c}{2}$

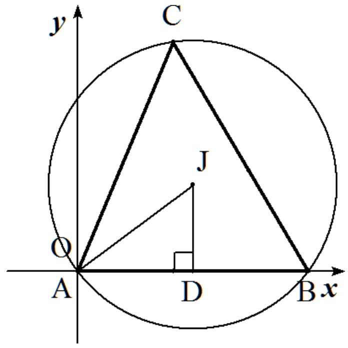
y_3 ＝IE$=r=\dfrac{S}{s}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$

よって，$\mathrm{I}\left(\dfrac{-a+b+c}{2},\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}\right)$

(4)　外心

x_4 ＝AD$=\dfrac{c}{2}$

AJ＝R で，△JAD は直角三角形であるから，



JD＝$\sqrt{R^2-\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}$

ここで，$2R=\dfrac{a}{\sin A},S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ より $R=\dfrac{abc}{4S}$

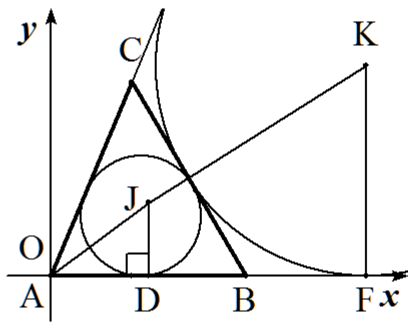
$$y_4=\mathrm{JD}==\sqrt{\left(\frac{abc}{4S}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}-\frac{c^2}{4}}$$

$$=\frac{c\sqrt{4a^2b^2-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}=\frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

よって，$\mathrm{J}\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}\right)$

(5)　∠A 内の傍心

x_5 ＝AF$=s=\dfrac{a+b+c}{2}$



次に，　AD=$s-a$ で，△ABC の∠A 内の傍接円の半径を r_1 とする。

△JAD∽△KAF であるから　$r:r_1=(s-a):s$

$$r_1=\frac{rs}{s-a}=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}$$

$$\therefore\ y_5 = \mathrm{KF}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}$$

よって，$\mathrm{K}\left(\dfrac{a+b+c}{2},\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}\right)$

3　五心間のそれぞれの距離

2 点間の距離の公式に代入して計算した結果は，次の通りである。ただし，式を簡潔に表すために，

$a^3+b^3+c^3=\sum^{3}a^3,\ a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2=\sum^{6}a^2b$　等々と表記する。

(1)　$\mathrm{GH}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\sum^{3}a^6-\sum^{6}a^4b^2+3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(2)　$\mathrm{GI}=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2\sum^{6}a^2b-\sum^{3}a^3-9abc}{a+b+c}}$

(3)　$\mathrm{GJ}=\sqrt{(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{\sum^{3}a^6-\sum^{6}a^4b^2+3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(4)　$\mathrm{GK}=\sqrt{(x_5-x_1)^2+(y_5-y_1)^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2\sum^{6}a^2b-\sum^{3}a^3+9abc-2a(2b^2+2c^2-a^2)}{-a+b+c}}$

(5)　$\mathrm{HI}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{\sum^{3}a^6-\sum^{6}a^5b-\sum^{6}a^4b^2+2\sum^{3}a^3b^3+3\sum^{3}a^4bc-2\sum^{6}a^3b^2c+6a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(6)　$\mathrm{HJ}=\sqrt{(x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{\sum^{3}a^6-\sum^{6}a^4b^2+3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(7) $\mathrm{HK}=\sqrt{(x_5-x_2)^2+(y_5-y_2)^2}$

$$=\sqrt{\frac{\sum^{3}a^6+\sum^{6}a^5b-\sum^{6}a^4b^2-2\sum^{3}a^3b^3-3\sum^{3}a^4bc+2\sum^{6}a^3b^2c+6a^2b^2c^2-2a^5b-2ac^5+4a^3c^3+6ab^4c-4a^3b^2c-4ab^2c^3}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

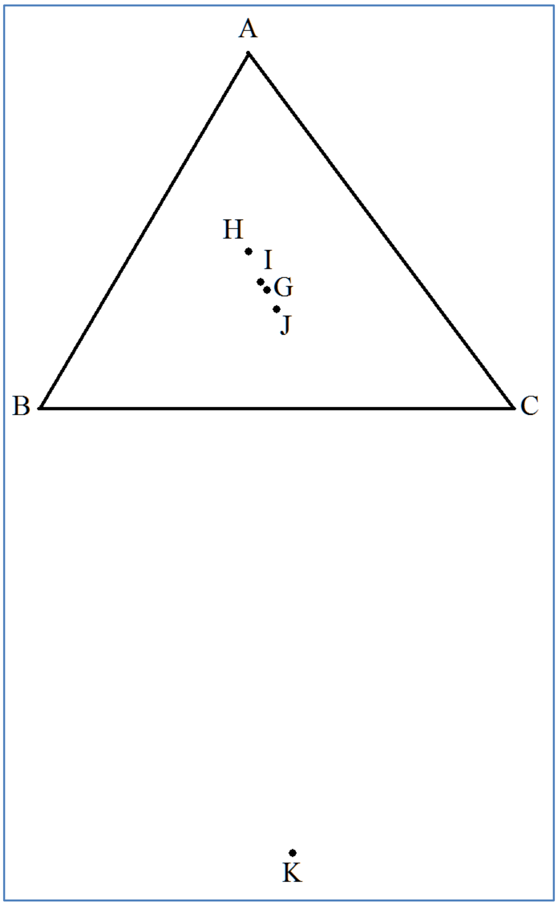
(8) $\mathrm{IJ}=\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2}=\sqrt{\dfrac{abc\left(\sum^{3}a^3-\sum^{6}a^2b+3abc\right)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

(9) $\mathrm{IK}=\sqrt{(x_5-x_3)^2+(y_5-y_3)^2}=2a\sqrt{\dfrac{bc}{(a+b+c)(-a+b+c)}}=\dfrac{a}{\cos\dfrac{A}{2}}$

(10) $\mathrm{JK}=\sqrt{(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2}=\sqrt{\dfrac{abc\left(-\sum^{3}a^3+\sum^{6}a^2b+3abc-2a(b^2+c^2-a^2)\right)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

4　具体例

BC=15，CA=14，AB=13である△ABCの重心，垂心，内心，外心，∠A内の傍心をそれぞれG，H，I，J，Kとする。



(1)　GH＝$\dfrac{\sqrt{265}}{12}$　　(2)　GI＝$\dfrac{1}{3}$

(3)　GJ＝$\dfrac{\sqrt{265}}{24}$　　(4)　GK＝$\dfrac{2\sqrt{709}}{3}$

(5)　HI＝$\dfrac{\sqrt{17}}{4}$　　(6)　HJ＝$\dfrac{\sqrt{265}}{8}$

(7)　HK＝$\dfrac{\sqrt{5777}}{4}$　　(8)　IJ＝$\dfrac{\sqrt{65}}{8}$

(9)　IK＝$5\sqrt{13}$　　(10)　JK＝$\dfrac{17\sqrt{65}}{8}$

（補足）Lを∠B内の傍心とすると，

GL＝$\dfrac{\sqrt{2329}}{3}$，　HL＝$\dfrac{\sqrt{4113}}{4}$，

IL＝$2\sqrt{65}$，JL＝$\dfrac{\sqrt{16705}}{8}$となる。

5　終わりに

五心間のそれぞれの距離の結果からも，GはHJを2:1に内分する点であるがわかる。

【参考文献】特になし