サイコロの目の和　覚書

北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

　複数個のサイコロを振った（投げた、転がした）ときに出る目の和の場合の数を効率良く数え上げることを考えます。また、ある個数の目の和を狙い撃ちして計算します。

１．大小 2 個の目の和

　大小 2 個については次の表を作るのが一般的です。

大･小	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	１０
5	6	7	8	9	１０	１１
6	7	8	9	１０	１１	１２

これにより、

目の和	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**１０**	**１１**	**１２**
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

　ところで、大中小 3 個のサイコロの目の和の場合の数を数えようとすると表から離れて計算していることと思います。

２．大中小 3 個の目の和

　大中小 3 個のサイコロを振る場合において、大中 2 個の表を参考にします。3 個目の小さなサイコロを手に持ちます。目の和が９になる場合の数を求めてみましょう。

　3 個の目の和が 9 になれるところを上の表で印をつけて数えます。

大中	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	×	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	×
4	○	○	○	○	×	×
5	○	○	○	×	×	×
6	○	○	×	×	×	×

×は、空白でもよろしいです。

“３個の目の和が９”＝25（通り）

ところで、2 個のときの表を活用することができます。9 になれるところは、

目の和	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
		○	○	○	○	○	○				

“３個の目の和が９”＝2+3+4+5+6+5= 25（通り）になります。

このようにして数えていくと 3 個の目の和について、

“３個の目の和が３” ＝1 =1（通り）

“３個の目の和が４” ＝1+2 =3（通り）

“３個の目の和が５” ＝1+2+3 =6（通り）

“３個の目の和が６” ＝1+2+3+4 =10（通り）

“３個の目の和が７” ＝1+2+3+4+5 =15（通り）

“３個の目の和が８” ＝1+2+3+4+5+6 =21（通り）

“３個の目の和が９” ＝2+3+4+5+6+5 =25（通り）

“３個の目の和が 10” ＝3+4+5+6+5+4 =27（通り）

“３個の目の和が 11” ＝4+5+6+5+4+3 =27（通り）

“３個の目の和が 12” ＝5+6+5+4+3+2 =25（通り）

“３個の目の和が 13” ＝6+5+4+3+2+1 =21（通り）

“３個の目の和が 14” ＝5+4+3+2+1 =15（通り）

“３個の目の和が 15” ＝4+3+2+1 =10（通り）

“３個の目の和が 16” ＝3+2+1 =6（通り）

“３個の目の和が 17” ＝2+1 =3（通り）

“３個の目の和が 18” ＝1 =1（通り）

従って、次の表を得ます。

目の和	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
場合の数	1	3	6	１０	１５	２１	２５	２７
目の和	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
場合の数	２７	２５	２１	１５	１０	6	3	1

以上の数え方を 1 個の場合の数を利用した 2 個の目の和の場合の数に応用してみます。

“２個の目の和が 2” ＝1 =1（通り）

“２個の目の和が 3” ＝1+1 =2（通り）

“２個の目の和が 4” ＝1+1+1 =3（通り）

“２個の目の和が 5” ＝1+1+1+1 =4（通り）

“２個の目の和が 6” ＝1+1+1+1+1 =5（通り）

“２個の目の和が 7” ＝1+1+1+1+1+1 =6（通り）

“２個の目の和が 8” ＝1+1+1+1+1 =5（通り）

“２個の目の和が 9” ＝1+1+1+1 =4（通り）

“２個の目の和が 10” ＝1+1+1 =3（通り）

“２個の目の和が 11” ＝1+1 =2（通り）

“２個の目の和が 12” ＝1 =1（通り）

4 個の目の和については 3 個のときの表を利用します。

“４個の目の和が４” ＝1 =1（通り）

“４個の目の和が 5” ＝1+3 =4（通り）

“４個の目の和が 6” ＝1+3+6 = 10（通り）

“４個の目の和が 7” ＝1+3+6+10 =20（通り）

“４個の目の和が 8” ＝1+3+6+10+15 =35（通り）

“４個の目の和が 9” ＝1+3+6+10+15+21 =56（通り）

“４個の目の和が 10” ＝3+6+10+15+21+25 =80（通り）

“４個の目の和が 11” ＝6+10+15+21+25+27 =104（通り）

“４個の目の和が 12” ＝10+15+21+25+27+27 =125（通り）

“４個の目の和が 13” ＝15+21+25+27+27+25 =140（通り）

“４個の目の和が 14” ＝21+25+27+27+25+21 =146（通り）

“４個の目の和が 15” ＝25+27+27+25+21+15 =140（通り）

“４個の目の和が 16” ＝27+27+25+21+15+10 =125（通り）

“４個の目の和が 17” ＝27+25+21+15+10+6 =104（通り）

“４個の目の和が 18” ＝25+21+15+10+6+3 =80（通り）

“４個の目の和が 19” ＝21+15+10+6+3+1 =56（通り）

“４個の目の和が 20” ＝15+10+6+3+1 =35（通り）

“４個の目の和が 21” ＝10+6+3+1 =20（通り）

“４個の目の和が 22” ＝6+3+1 =10（通り）

“４個の目の和が 23” ＝3+1 =4（通り）

“４個の目の和が 24” ＝1 =1（通り）

３．　目の和の数え方の一般化

1 個の目から 2 個の目の和、2 個の目の和から 3 個の目の和、3 個の目の和から 4 個の目の和、‥‥‥として、リレーしていくことができることがわかったことと思います。そこで、1 個の目の出方 1 2 3 4 5 6 を

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0

として左から 1 つずつずらしながら、**連続 6 項の和**を求めていくと、2 個の目の和の場合の数が求まり、1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1 となります。これを

0 0 0 0 0 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1 0 0 0 0 0

として、また左から１つずつずらしながらまた連続 6 項の和を求めていくと、

1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1 となります。前後に 0,0,0,0,0 を付け加え、

0 0 0 0 0 1 3 6 10 15 21 25 27 2725 21 15 10 6 3 1 0 0 0 0 0

として同様に求めていくと、

1 4 10 20 35 56 80 104 125 140 146 140 125 104 80 56 35 20 10 4 1

となり、4 個の目の和の場合の数になります。表計算ソフトの Excel や Lotus1-2-3 などにより簡単に 5 個以上の目の和の場合の数を連続 6 項の和として作ることができます。試してみてください。

４．　複数個のサイコロを振ったときの目の和についての狙い撃ち計算について

まず、整式 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ と$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2$ を展開しましょう。

$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$・・・①

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10}$・・・・・②

②の右辺は、①を

$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10})$・・③

としたときの（　　）の中の整式です。①より「x」を「・１つ」とみなせばよく、場合の数の和の法則では「または」を「＋」で数えました。サイコロ 2 個を振ったとき、③の式より②を「・２つ」は最低限起きていると考えサイコロの各面から「・」を１つずつ削って（埋めて）、１の目は「・なし」、2 の目は 「・１個」、３の目は「 ・２個」、４の目は「・３個」、５の目は「 ・４個」、６の目は「 ・５個」と考え、 ”1” を「・なし」と考えましょう。従って、目の和を①、②の項の係数として入手することができます。

サイコロを 3 個振ったときに応用してみます。「目の和が 9 になる場合」と「目の和が 10 になる場合」を考えます。サイコロを 3 個振ったときの数式は、$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$・・・($*_1$)です。「目の和が９」の場合の数は 3 個のサイコロで少なくとも・が１個ずつは起きているので、ほかの・の数 6 個になる場合を数えることができればよいことになります。従って、x^6 の係数を求めると

$1*x*x^5$・・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$1*x^2*x^4$・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$1*x^3*x^3$・・・・・${}_3C_1$ =3

$x*x*x^4$・・・・・・${}_3C_2$ =3

$x*x^2*x^3$・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$x^2*x^2*x^2$・・・・${}_3C_3$ =1

25 (通り)

目の和が 10 の場合は、・7 個の係数を調べて

$1*x^2*x^5$・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$1*x^3*x^4$・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$x*x*x^5$・・・・・・${}_3C_2$ =3

$x*x^2*x^4$・・・・・${}_3C_1*{}_2C_1$ =6

$x*x^3*x^3$・・・・・${}_3C_1$ =3

$x^2*x^2*x^3$・・・・${}_3C_2$ =3

27 (通り)

となりますが、効率良い狙い撃ち計算にはなっていません。

サイコロを複数個振ったときの目の和の場合の数を考える**母関数**と呼ばれるものがあります。数列の一般項を考える上で有益な方法です。級数や冪和の一般項に応用することもできます。サイコロを 3 個振ったときを扱う母関数は、($*_1$)を次のように変形します。通常（型）母関数といわれるもので、右辺が母関数です。

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3 = \frac{(1-x)^3*(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{(1-x^6)^3}{(1-x)^3}$$

分子$=1-3*x^6+3*(x^6)^2-(x^6)^3$

$=1-3*x^6+3*x^{12}-x^{18}$　　$=1-{}_3C_1*x^6+{}_3C_2*x^{12}-x^{18}$

分母$=(1-x)^{-3}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k * \frac{-3*(-3-1)*(-3-2)\cdots*(-3-k+1)}{k!}*(-1)^k$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x^k * \frac{(k+2)(k+1)}{2*1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x^k * {}_{k+2}C_2$$

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k * {}_{k+2}C_2 - {}_3C_1 * \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+6} * {}_{k+2}C_2 + {}_3C_2 * \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+12} * {}_{k+2}C2$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+18} * {}_{k+2}C_2$$

となります。サイコロを 3 個振ったとき「目の和が９になる」場合の数を、右辺で計算します。x^6 の係数なので、第１項で k=6、第２項で k=0 として、

$${}_{6+2}C_2 - {}_3C_2 * {}_{0+2}C_2 = 28 - 3*1 = 25$$

「目の和が 10 になる」場合の数は、x^7 の係数なので、第１項で k=7、第２項で k=1 として、

$${}_{7+2}C_2 - {}_3C_2 * {}_{1+2}C_2 = 36 - 3*3 = 27$$

となります。

サイコロ 4 個を振ったときの目の和の母関数を作ってみます。

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = \frac{(1-x)^4 * (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$

分子$=1 - 4*x^6 + 6*(x^6)^2 - 4*(x^6)^3 + (x^6)^4$

$=1 - 4*x^6 + 6*x^{12} - 4*x^{18} + x^{24}$　　$=1 - {}_4C_1*x^6 + {}_4C_2*x^{12} - {}_4C_3x^{18} + x^{24}$

$$分母= (1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k * \frac{-4*(-4-1)*(-4-2)\cdots*(-4-k+1)}{k!} * (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k * \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{3*2*1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k * {}_{k+3}C_3$$

従って、

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k * {}_{k+3}C_3 + {}_4C_1 * \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+6} * {}_{k+3}C_3 + {}_4C_2 * \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+12} * {}_{k+3}C_3$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+18} * {}_{k+3}C_3$$

目の和が 13、14 の場合の数を求めてみます。「・の数」を 9、10 として数えるとよいので、目の和が 13 の場合は、第 1 項で k=9、第 2 項で k=3 として、

$${}_{9+3}C_3 - {}_4C_1 * {}_{3+3}C_3 = 220 - 4*20 = 140$$（通り）

目の和が 14 の場合は、第 1 項で k=10、第 2 項で k=4 として

$${}_{10+3}C_3 - {}_4C_1 * {}_{4+3}C_3 = 286 - 4*35 = 146 \text{（通り）}$$

です。

サイコロを 5 個以上振ったときの目の和の表を表計算ソフトで作り、その個数に伴う母関数を作りながら目の和の場合の数が何通りになるか計算してみて下さい。ちなみに、異なるサイコロを 5 個振ったときの目の和が 15,17 になる場合の数は 651,780 で、6 個のときの目の和が 18,20 になる場合の数は 3431,4221 です。表を作成するだけでも有益だと考えますが、いかがでしょうか。

追記　３のように考えた方がおられました。Integer Sequences で A063260 をみてください。

文献

西岡弘明　やさしい組合せ数学（コロナ社）

下町壽男　http://www5b.biglobe.ne.jp/~simomac/neko2.htm（盛岡市の高校の先生です。）