

第6講 フラクタルとカオス

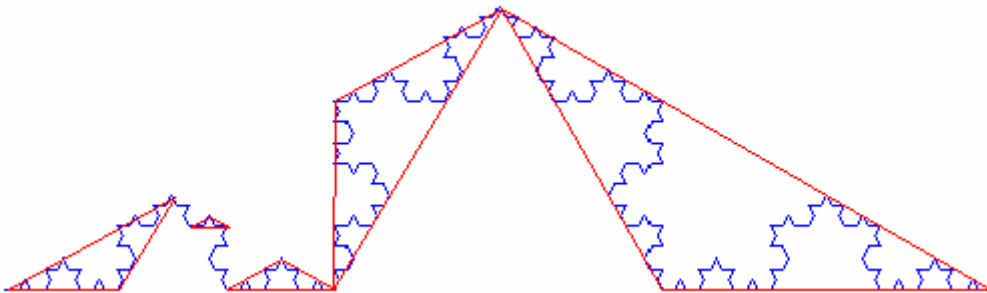
6_1 コッホ曲線

次のような曲線を作成してみましょう。



この操作を何度も無限に続けていきます・・・

できた曲線を眺めると、いたるところ相似な図形だらけになっていますね。この曲線を“コッホ曲線”といいます。このようにいたるところ自己相似な図形を“フラクタル図形”といいます。

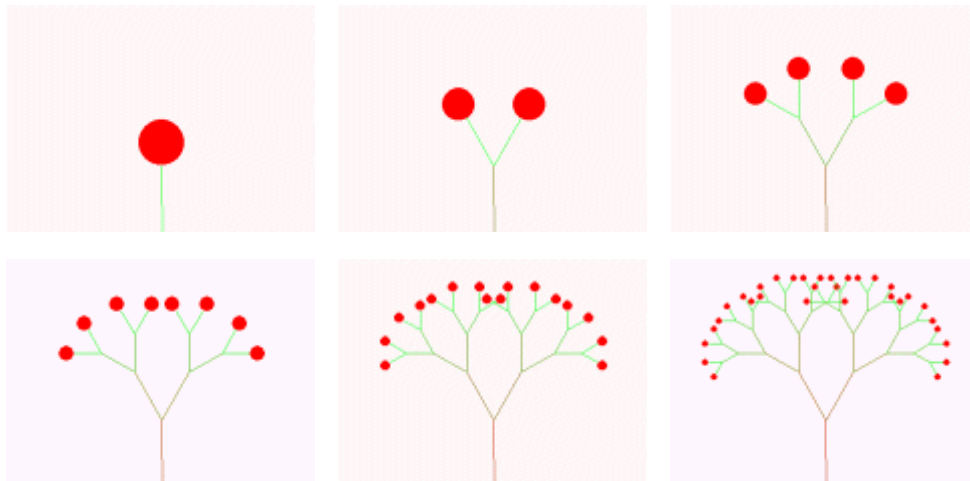


作成した図形は正三角形の出っ張りを埋め込んでいきましたが、もっと違った図形を埋め込んだりしたらどんな図形が得られるのでしょうか。それは次のページで試してみてください。

6_2 樹木曲線

シダの葉やリアス式海岸、更には銀河系を取り巻くメタ宇宙など、自然界の中には階層的に同じ構造を持つものが数多く存在します。こうした同じ規則性で繰り返され、無限の階層構造を持つものを「フラクタル図形」といいます。

そんな再帰的に描かれる図形のうち「樹木曲線」と呼ばれるものを見てみましょう。いま、1本の木の先に2つの木の枝を分岐させます。その先に赤い実が1つなっています。つぎに縮小させた2つの木の枝を分岐させます。またその先に縮小した同じ木の枝を分岐させます。こうした操作を何度も続けていくと美しい樹木曲線が姿を現してきます。

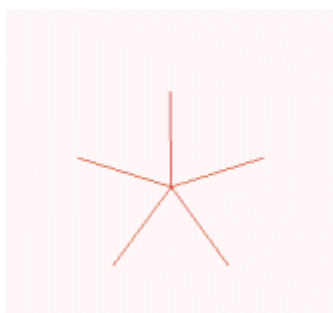


さらに分岐する角度や縮小する割合などを変えると、また違った樹木曲線が描かれます。

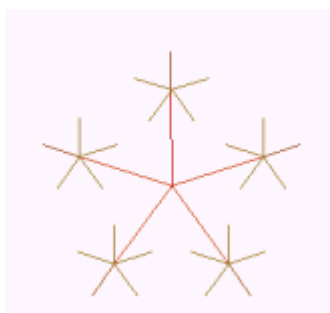


6_3 再帰図形

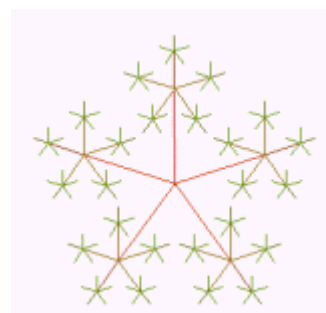
至る所で屈曲している自己相似な図形をフラクタル図形といいました。しかし、自己相似ではありませんが、再帰的に描かれる図形は他にもあります。そんな図形を描いてみましょう。



1点から5本の線分を同じ角度で放射状に描きます



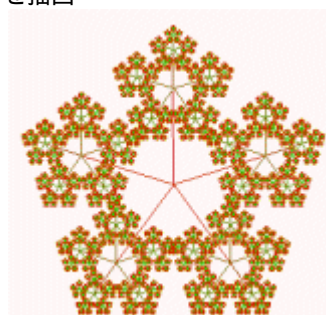
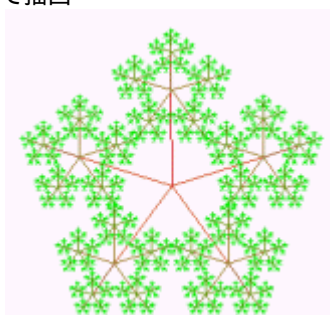
各線分の先端に最初の図形を縮小して描画



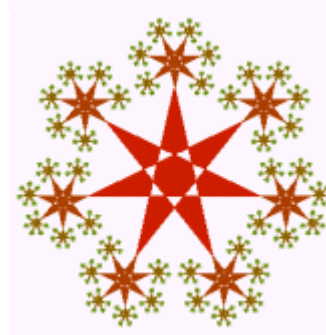
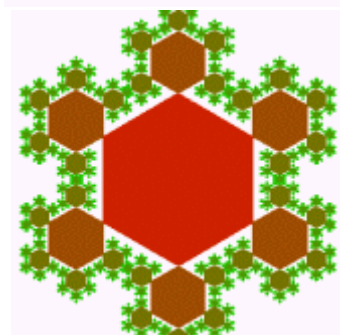
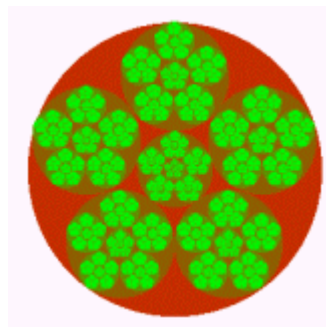
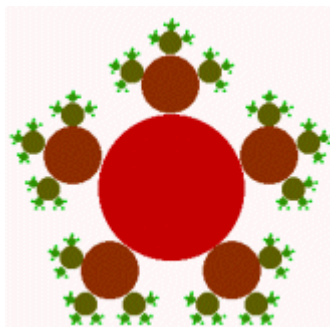
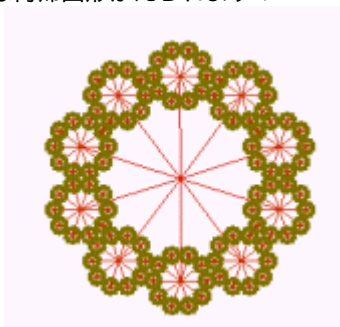
更にその先端にさらに縮小した図形を描画



その操作を無限に繰り返していく・・・



こうして得られる図形を“再帰図形”といいます。先ほどの図形は線分でしたが、その他の図形で再帰的に描くといういろいろな再帰図形がえられます。



6_4 線形な漸化式

「カオス理論」という言葉を聞くと、とても難しい印象があります。しかし、今まで抽象的にしかとらえられなかった数学が、コンピュータを使うことによって一瞬にしてビジュアル化されたとしたらどうでしょう。そんな驚きと感動を、コンピュータは与えてくれます。

非線形な世界における様々な現象が、私たちが創造的な世界へと導き、「数学 = 発見」へと発想を転換させてくれます。

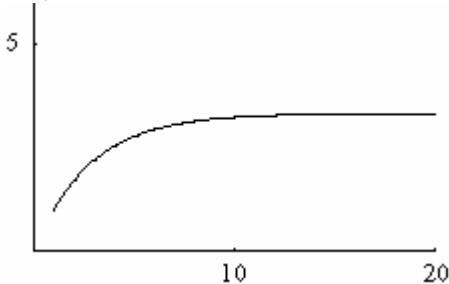
漸化式 $x_{n+1} = a x_n + b$ (a, b は定数、 $n = 0, 1, 2, \dots$) で定められる数列 $\{x_n\}$ は n の値をどんどん大きくしたとき、どのような値をとるか調べましょう。

例えば $a=0.7, b=1$ のとき、即ち $x_{n+1} = 0.7 x_n + 1$ の場合を考えてみましょう。初期値を $x_0=1$ として計算して第 20 項まで計算してみます。

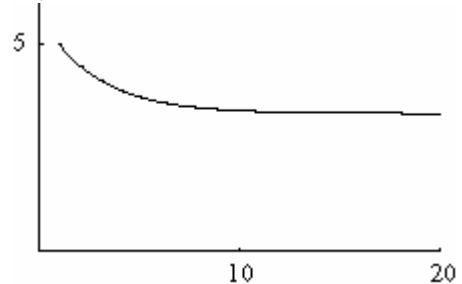
1, 1.7, 2.19, 2.533, 2.7731, ..., 3.3279, 3.3295, 3.3307, 3.3315

だんだん一定の値に近づいてくるのがわかります。これをグラフに表したのが、次の左図です。同様に初期値を $x_0=5$ として、グラフ化したのが右の図です。初期値を変えても同じ値に近づくのがわかります。

$a=0.7, b=1, x_0=1$

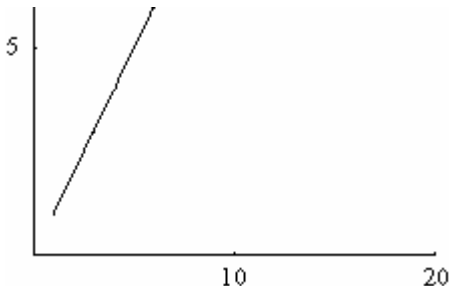


$a=0.7, b=1, x_0=5$

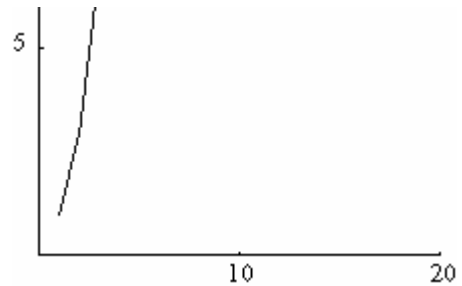


それでは係数 a の値を変えて、どんな動きをするかを見てみましょう。係数 b と初期値 x_0 は $b=1, x_0=1$ とします。

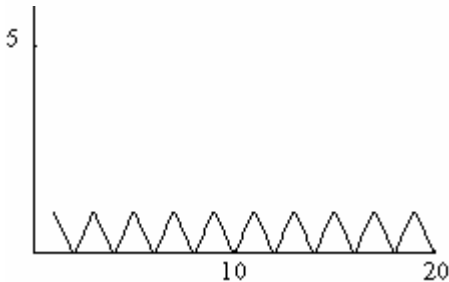
$a=1$



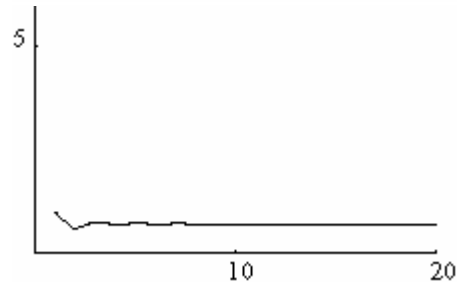
$a=2$



$a=-1$



$a=-0.4$



これより、一定の値に近づく場合、どんどん値を変えて不安定になる場合、2つの値をとりながら安定する場合の3通りがあることがわかります。それらを、それぞれ収束、発散、振動といいます。まとめると次のようになります。

- | | | |
|-----|---------------|---------------------------|
| (1) | $ a < 1$ のとき | 一点に収束 |
| (2) | $ a = 1$ のとき | $a = 1$ で発散, $a = -1$ で振動 |
| (3) | $ a > 1$ のとき | 発散 |

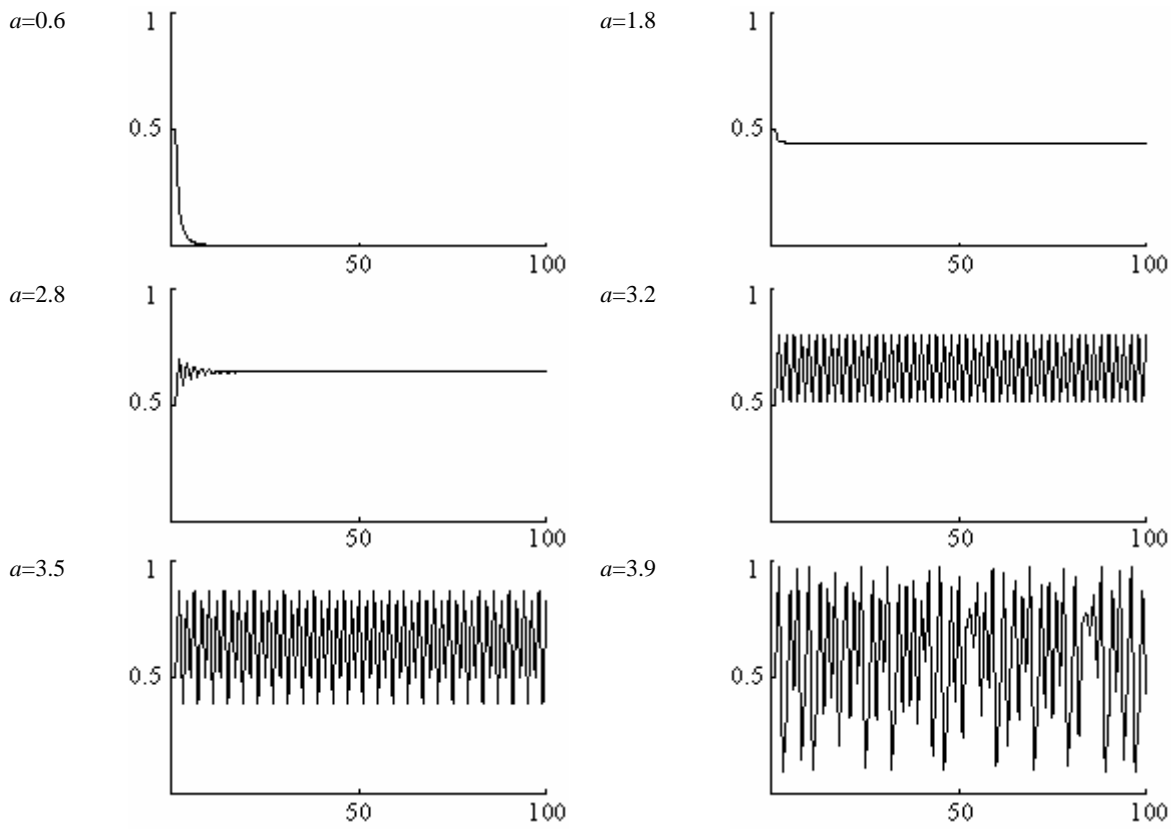
6_5 非線形な漸化式

同様にして、今度は定数 a を含む次のような非線形な漸化式を考えてみましょう。

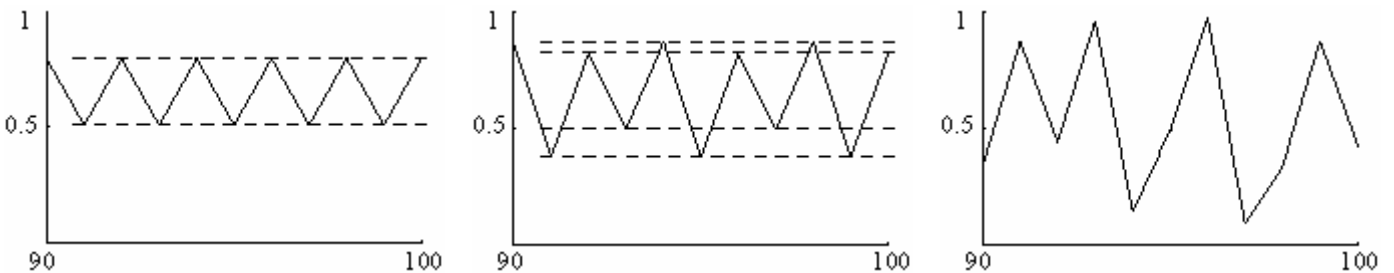
$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \quad (a \text{ は定数、} n = 0, 1, 2, \dots)$$

少し難しい式ですが、線形の漸化式からは想像もつかないような、興味深い内容が数多く含まれています。

それでは a の値をいろいろと変えてグラフの変化の様子を見てみましょう。今回は第 100 項まで ($n=100$) を計算させてみます。



最初の3つは一定の値に収束するのが分かりますが、あとの3つはどうでしょう。分かりやすくするために最後の10項 ($n=90 \sim n=100$) だけを取り上げてみます。



$a=3.2$ の場合は2つの値を $a=3.5$ の場合は4つの値を交互に取るようですが $a=3.9$ の場合はいろいろな値をとります。

- $a=0.6$ \cdots 0に収束
- $a=1.8$ \cdots 一定値に収束
- $a=2.8$ \cdots 振動しながら一定値に収束
- $a=3.2$ \cdots 振動しながらある2つの値に次第に近づき、2つの値を交互に繰り返す
- $a=3.5$ \cdots 振動しながらある4つの値に次第に近づき、4つの値を交互に繰り返す
- $a=3.9$ \cdots すぐにははっきりとした規則性は見いだせない

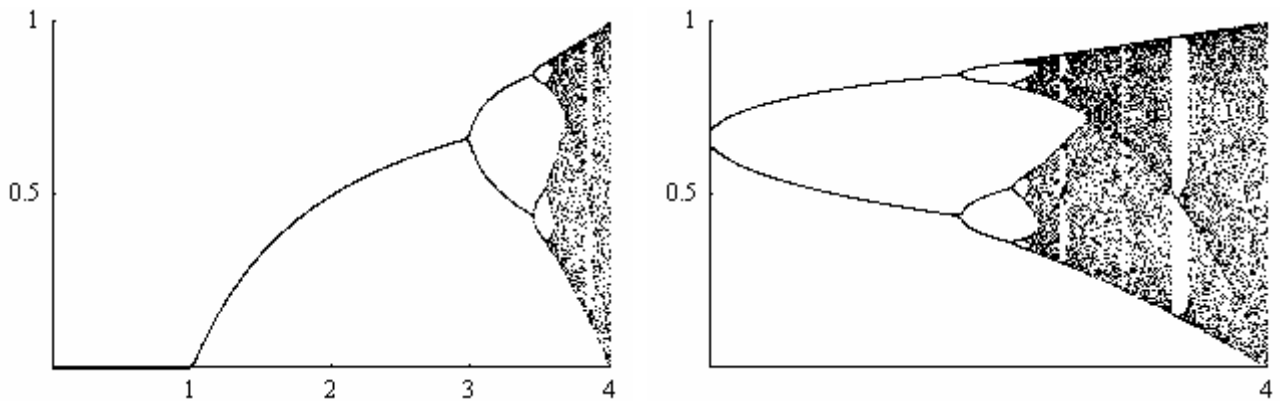
~ のように軌道が最終的に1つの点に落ち着くとき、その点を安定不動点といいます。、 のように振動しながらある2つ(または4つ)の点に近づきその点を繰り返すとき、その点を安定2(または4)周期点といいます。まとめると、つぎようになります。

- (1) $0 < a < 1$ のとき 一定値 0 に収束
- (2) $1 < a < 3$ のとき 0でない一定値に収束
- (3) $3 < a < 4$ のとき 最初は2つの値で振動、その後4つの値で振動、その後は...

$0 < a < 3$ については簡単な性質をすぐに見いだすことができます。しかし、 a の値が値 3 を過ぎるとき非常に複雑な様相を示すことがわかります。つまり、 $a > 3$ のときの様子を探っていけば、更に新たな発見が出てきそうです。最初は2つの点で周期性を示し、次に4つの点で周期性を示します。そのまま、どんどんその周期性は倍々ゲームのようになっていくのでしょうか。

6_6 カオスの領域

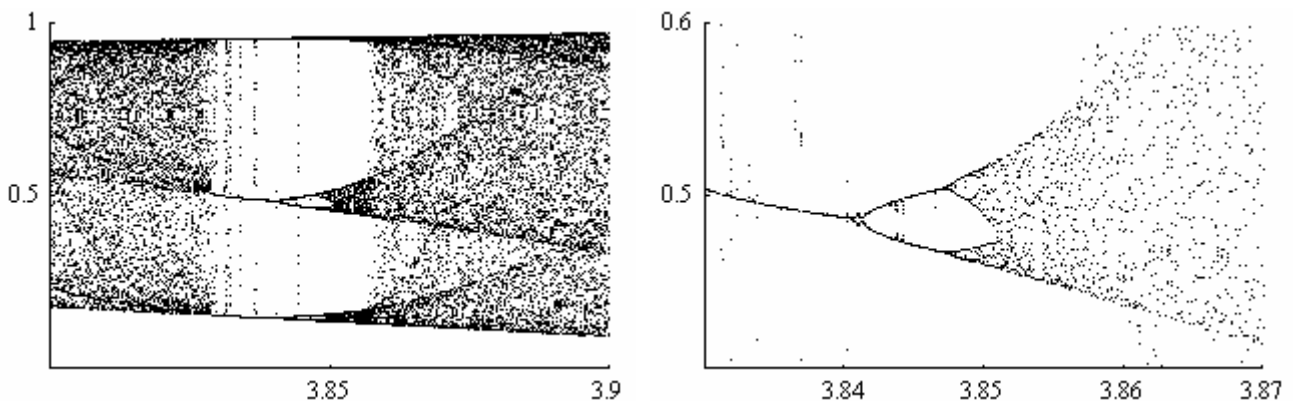
これまでのことから、 $a > 3$ のときの様子を調べていけば新たな発見が生まれそうだとわかりました。そこで、最終的な値だけをとってその様子を調べてみましょう。横軸に係数 a 、縦軸に x_n の値をとります。 x_n の値を初項から第 100 項までを計算し、その最後の第 80 項から第 100 項までの点を単純にプロットして見ます。



見慣れないグラフが姿を現したのではないのでしょうか。このグラフを「分岐ダイアグラム」といいます。この分岐ダイアグラムをみると、先ほど考察したとおり、次のことがすぐにわかります。

- (1) $0 < a < 1$ のとき 一定値 0 に収束
- (2) $1 < a < 3$ のとき 0 でない一定値に収束

問題は $3 < a < 4$ の部分です。範囲を拡大して描いたのが上図右のグラフです。 $a=3$ を過ぎてから 2 つに分岐し、その後 4 つに分岐しているのは既に観察したとおりです。その後はやはり 8 つに分岐しているようです。そのあとは少しわかりづらいようなので、更に拡大して考察してみましょう。



$3.8 < a < 3.9$ の部分を拡大したのが左の図、 $3.83 < a < 3.87$ の部分を拡大したのが右の図です。よくみると驚くことに、白く筋のようになっている部分（これを「窓」といいます）に、自己相似な図形がみえてきました。つまり、分岐が発展する様子は自己相似な構造（フラクタルという）をなしているのです。

実は、 $3 < a < 4$ の間における様子を厳密に調べると、

- (3) $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ においては 2 つの値の間を振動
- (4) $1 + \sqrt{6} < a < 3.570 \dots$ においては いろいろな値を振動
- (5) $a > 3.570 \dots$ においては 非常に複雑な動きを示す

ということがわかっています。この最後の部分の領域が「カオスの領域」と呼ばれています。