数学科教育法　数学基礎論

魅力ある数学教材を考えよう

－Web 型数学通信『数学玉手箱』より－

札幌新川高等学校　早苗　雅史

0．はじめに

次期新課程では「ゆとり」「主体的に問題を解決する行動」「学ぶことに楽しさと充実感」といったキーワードが強調されています。数多くの受験問題をひたすら学習するだけでは，数学が単に嫌われ者で終わるのも仕方ないかもしれません。数学がもっと面白く感じ，興味・関心を持ってくれる，そんな授業が今こそ求められているのではないでしょうか。いえ，これまでもずっとそうだったはずです。

「理系離れ」が叫ばれる中，本当の数学の魅力を伝えないまま，数学嫌いが増えてしまうのは大変残念な気がします。数学教育の中にも受験数学では味わえないような，興味深く，面白いと感じられるような題材を授業の中に取り入れてみましょう。普段の授業の中にも，ワンポイントでもいいので，魅力ある題材を用意しておくことは，生徒の数学に対する見方が変わるのではないでしょうか。

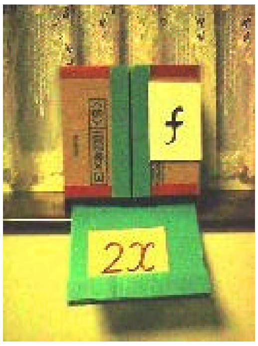
年間教える数多くの授業の中で，魅力ある題材をどれだけ用意できるか。日々の教材研究の必要性がここにあるといえます。そうした題材のいくつかを数学通信『数学玉手箱』から紹介していきたいと思います。ここに収められている題材の多くは北数教高校部会のホームページ「数学のいずみ」に収まられているレポートを簡潔にまとめたものです。興味を持って更にもっと知りたいと思えば，本編の方にリンクが張ってあるのでそちらをご覧下さい。

またこのレポートでは，題材の内容についての解説をしてあるだけですから，『数学玉手箱』を同時にご覧いただきながら内容を理解していただきたいと思います。

2．教具の魅力　～手作り教材

まずは自作の教具を用いた題材を紹介します。昨今の情報化の時代においてコンピュータを用いた視覚的な授業も，当然のことながら，これからの時代の主役となるのはいうまでもありません。しかし生徒にとって身近な教具を用いた授業は，コンピュータを用いる以上に興味を持ち，またインパクトのある授業を展開することができるのです。

2_1　ブラックボックス



現在の課程では関数教材は各学年に分断された形で展開され，見方によっては関数一般という概念をまとめきれない事情に置かれているといえます。教科書では関数の定義として，集合から集合への対応，あるいは変数から変数への対応という形でまとめられています。従って対応の規則に目を向け，x や y は自変数，従変数として f とは独自な概念として規定されていることになります。本当は x，y にあてはまるものは数でなくても，数の組，ベクトル，点の座標，その他何らかの集合の元であればよいのですが，それが体系づけられた形で教えられてはいません。そこで最初に“関数とは何か”を述べるときに関数の様々な意味の拡張に適応できるような形でまとめておくことが望ましいといえます。そのため関数 f のもつ働きや，対応のさせ方が容易に思い浮かべられるようなシェーマを工夫することが必要になります。それがブラック・ボックス（暗箱）です。

昔，関数は“函数”と表記されていました。この“函（はこ）”という字は，まさに関数の本質をついた当て字だといえます。ブラック・ボックスとは内部のからくりがどうなっているかは別問題として，とにかく何らかの仕掛けによって一定の操作を行う装置です。入ってくるもの（入力）に加工を施したもの（出力）を外部に送り出す働きを持っています。

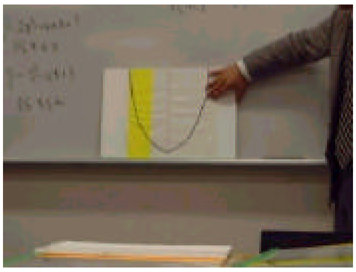
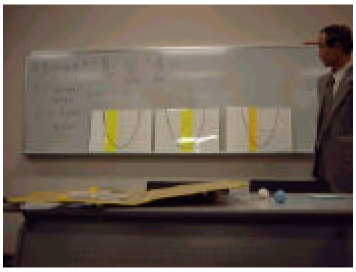
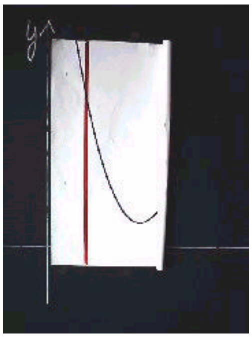
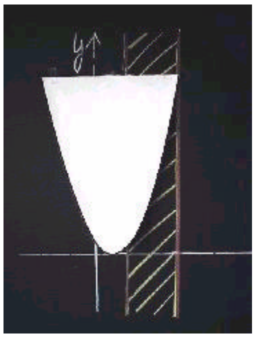
紹介するブラックボックスは箱に「 f 」という名前がついています。表・裏に規則性に従った数字が書かれたカードの組を数種類作っておき，ブラックボックスにカードを入れ，出力される数字から規則性を推測させます。最後に箱の中を明けて種も仕掛けもないところを見せるところがミソですね。

ブラックボックスには逆関数バージョン，合成関数バージョンも存在します。なお小樽双葉高校の大山斉先生に資料提供をしていただきました。

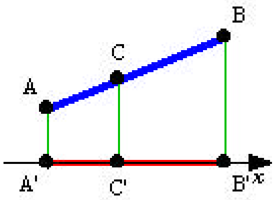
2_2　手軽にできる最大・最小

2 次関数の最大・最小問題には，区間右端・左端が変化するもの，区間幅一定で変化するもの，関数自体が変化するものなど様々で，そのどれもが場合分けをするため生徒にとっては難解な問題の一つです。

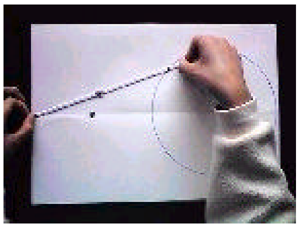
これを手軽な教具を用いて説明することで，少しは問題のイメージ化に役立たせることができます。
　最初の例は紙に描かれた放物線の上でをセルロイドでできた区間を単純に移動させることで，最大・最小を理解させようとするものです。単純ですが生徒の理解の手助けに十分役に立ちます。更に手軽に指導するには，右の写真のように模造紙を用いて行います。模造紙を区間に見たて右端を丸めることで区間幅を変化させたり，模造紙で放物線を作り移動させたりします。模造紙を持っていってその場で作成することもできる手軽さが良いですよね。

2_3　手作りアポロニウスの円



　ゴムひもの長さを m：n の比に分ける点に印をつけます。ゴムひもを伸び縮みさせても印によって分けられる内分比は変化しません。このことを教材に用いてみましょう。
　平面上における内分点の座標を考えます。右図のように線分 AB にあるゴムひもを垂直に下ろして A'B'に持ってきます。ゴムひもの内分比が保持されることを用いれば，内分点の x 座標が直線上での求め方と同様に求められることが分かりますね。
　さらにゴムひもはアポロニウスの円にも応用できます。円周上の動点と円外の一点を結ぶ線分 m：n に内分（外分）する点の軌跡は円になりますが，単に計算だけで求めるだけでは無味乾燥な内容となってしまいます。これを先ほどのゴムひもを用いて簡単にイメージさせることができます。ゴムひもの内分点に印をつけておきます。ゴムひもの端点を固定し，もう一方の端点を円周上で動かすときのその印の軌跡を考察させるのです。軌跡が円になることがイメージできれば，中心と半径を求めることで，複雑な計算とはまた別な方法が見えてきます。
　この教具に次のような話題（ストーリー）を事前に考えさせることで，題材として更に面白いものとなります。

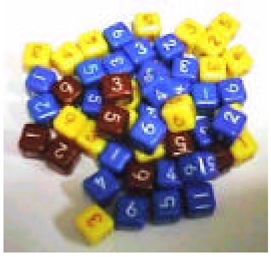


> 「ジェラシー大作戦」
> 　ある高校にアイドルちゃんと呼ばれる女の子がいる。彼女は容姿もプロポーションも抜群で，しかも努力家であると言う。彼女は陸上部に所属し，放課後はいつも陸上グランドで走る練習をしている。一方，あこがれ君は同じ学校でのサッカー部のゴールキーパーである。アイドルちゃんに熱烈に恋焦がれており，放課後はゴールキーパーの位置から走っている彼女に，いつもラブサインを送りつづけている。
> 　このことを知ったジェラシー君の心境はおだやかでない。彼は，あこがれ君の意図をなんとか妨害しなければと固く決意し，視察を続けた結果，次のことに気がついた。
> 　あこがれと，君アイドルちゃんを結ぶ線分を 2：1 に内分する点に彼が立つと，彼に遮られてあこがれ君からはアイドルちゃんが見えなくなってしまうのである。
> 　ジェラシー君の妨害作戦が成功するためには，彼はどのような走り方(動き)をしたらよいだろうか。
> ………大山斉先生著　「教具の工夫～いくつかの実例～」から原文引用

2_4　ハノイの塔

　数列に関するパズルゲーム『ハノイの塔（ディスク・ピラミッド）』は 1883 年にフランスのパズル研究家 E．リュカが考えたゲームです。しかしこの題材は教師が一方的に説明するよりも，生徒が自らの手を動かし，考え，予想するところに教材としての価値があるといえます。
　市販の教具「ハノイの塔」は若干小さく，生徒には見えずらいという欠点があります。手作りの大きなディスクで説明するのがよいでしょう。生徒には 5～6 枚の厚紙で作ったディスクを用意し，何回で動かすことが出来るかを考えさせます。厚保紙のディスクは表・裏交互に載せるようにすると分かりやすくなります。数列の導入にはもってこいの題材です。

2_5　さいころの実験



場合の数，確率の導入時において実際にさいころをふらせて統計をとることは，古典的ですがとても有効な“実験”だといえます。

「2 つのさいころを投げて，目の和が 9 になる場合と 10 になる場合では，どちらが出やすいでしょうか。」

生徒の意見を聞くと半々に分かれます。この“実験”を①単元の最初に行うことと②実験を始める前に生徒に予想を立てさせること，がこの題材を生かすポイントになります。

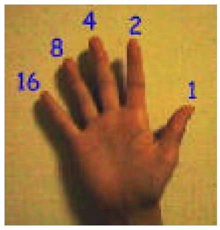
2 人 1 組（1 人が投げて 1 人が記録する）くらいがちょうど良い所でしょう。集計後，どうしてそういう結果が出たのか，また数学的確率との違いはどれくらいあるのかを考えさせます。

さいころも自分で作らせるところから始める先生もいます。

3．遊び心を持った教材

“数学”という言葉の響きに，既に嫌悪感を持っている生徒も多いようです。そんな感情を少しでも和らげることができる題材を，数多く用意することができれば授業の幅も広がります。数学にも“遊び心”を持ったそんな題材をいくつか紹介しましょう。

3_1　指で数える 2 進法



ディジタル時代になって一躍脚光をあび出した 2 進法。新教科「情報」においても，2 進法や 16 進法は基礎的な理論として学習します。

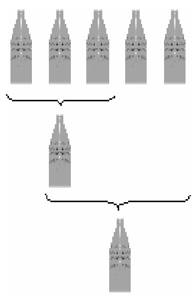
この 2 進法を遊び心いっぱいに，指を使って学ぶのがこの題材です。

指を折ったときが 1，立てた状態を 0 とし，親指から 1 の位，人差し指が 2 の位，…，小指が $2^4=16$ の位とすると，片手で 0 から 31 までの 32 個の数字を表現することができます。

種明かしは後にして，「いい，これが基本形で 1 だよ。それじゃこれはいくつ？」などと発問し，生徒に推測させます。何問かやれば，勘の良い子はすぐに理屈を見破ります。

かなり昔，サザンの原由子がピアノの指の訓練にこの 2 進法をやっているのを見たことがあります。確かに 0 から 31 まで早く指を折っていくのは良い訓練になるかもしれませんね。

3_2　コーラのビン

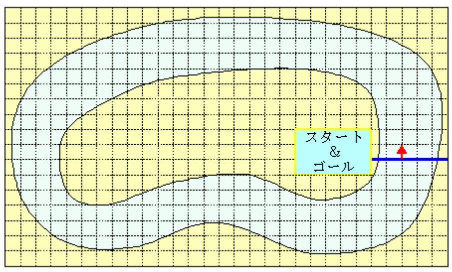


かなり以前に数学セミナーに紹介された話題です。生徒にとっては難解な群数列の問題を“コーラのビン”を用いて考えさせます。群数列といっても単純な例なので，群数列の導入段階で用いることができます。また 2 つづつの組合せを作れば以外と簡単に答えを出すこともできます。

3_3　無限ホテル

有限数列，無限数列についての定義を教える最初の時間に話題にします。まず問題の意味を理解させるのに多少時間がかかります。有限の客が来た場合の話しを先にしますので，どうしても生徒はその印象に引きずられるようです。しかし“無限”の作り方を考えさせる良い題材だといえます。

3_4　ベクトルグランプリ



ベクトルが「大きさ」と「向き」を持った線分であることを実感させる題材です。コースを作り，そこを矢印をつなげて 1 周させます。いかに少ない本数で 1 週することができるかを競わせます。

矢印をつなげていく事でベクトルの和の作り方を理解することができます。また，つなげることができる矢印の大きさに制限をつけることで，ゲーム性を持たせることができます。ゲームソフトに，加速度を制限することで停車位置にどれだけ正確に停車させることができるかを競う「電車で GO！」というのがありますが，“加速度”に“向き”をつけ加えた「ベクトルグランプリ」を是非楽しんで見てください。

生徒にはベクトルの矢印を計算して行く表とコースを渡して記入させて行かせます。ゴールできた人からつなげた本数を申請させます。いくつかコースを用意しておくといいでしょう。

授業でベクトルの定義を教えるのは奥が深いといえます。単純に矢線ベクトルとして定義している教科書も多いようですが，「ベクトルとはベクトル空間の元のことである」と主張する派と「ベクトルとは矢印のことである」と主張する派との間で論争になったこともあるほどです。

3_5　親になる確率

確率の授業の最初にさいころの和についての問題を学習します。ある程度学習したあとある“中国ゲーム”(それとも“四角いジャングル”といった方が良いでしょうか）の話しをします。教育上，はっきりとした名前はいえませんが…。某ゲームの親決めに関する確率の問題を生徒に出してみましょう。2 つのさいころを投げて出た目によって

目の和が 5，9 のとき　A が親，　　　目の和が 2，6，10 のとき　B が親
目の和が 3，7，11 のとき　C が親，　　目の和が 4，8，12 のとき　D が親

とするとき，どの親がもっともなりやすいか。

高校生ともなると，このゲームが何かをすぐに気付く生徒もいます。普段あまり数学に興味を示さない生徒も急に問題に関心を持ち出し，理論よりも直感で考えたがります。あまり教育的ではありませんが，確率はギャンブラーの学問でもあることが実感できます。

3_6　円周率の奏でる音楽

インターネット上では円周率に関するホームページは数多く存在します。Yahoo!Japan で「円周率」で検索すると 1 万 7 千件がヒットしてきます。それほど円周率は人々の心を魅了する題材なのでしょう。

その中でも円周率を音符化し，実際に音楽を聞くことができるページもいくつかあります。

プリントを配布すると同時に実際に音楽を聞かせてみるのも面白いでしょう。普段数学の授業の中で音楽と関係する事などほとんどないので，とても新鮮に感じますよ。

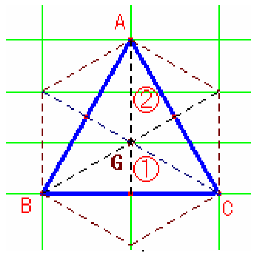
最近はフリーの音楽用ソフトも出ているので，円周率を音符に置き換えて自分で作曲することもできます。

4．公式を効率よく考える

生徒にとって数学の授業を嫌いにさせている理由の一つに，教師が定理や公式の証明を長々とやってしまうこともあるのではないでしょうか。証明は生徒にとっては難しい場合が多く，また最後に出てくる結果だけを使いこなせればいいのに…，などと思っている生徒も多いようです。

確かに将来数学を専門にやる生徒などほとんどいないわけですし，出てきた結果を使いこなせれば，それほど困ることはありません。しかし教える側にとっては，体系的な学問“数学”を教える以上，証明をしないのはどうも納得のいかないところもあります。そんな定理や公式を効率良く理解することができる，そんな題材をいくつか紹介しましょう。

4_1　三角形の重心とアファイン変換



三角形の重心が各中線を 2：1 の比に内分することを証明するのは，計算で行う場合とても大変です。そこで図形の変換によってこのことを示してみましょう。1 次変換によって変化しないものは，

①平行な 2 つの線分の比　　　②同一直線上の 2 つの線分の比
③2 つの図形の面積比　　　　④2 直線が平行である性質及び交わる性質

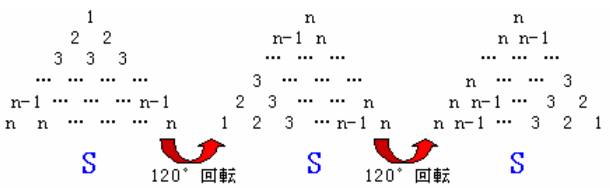
などがあります。逆に 1 次変換で変わるものは，

①線分の長さ　　②図形の面積　　③2 直線のなす角度　　④点の座標

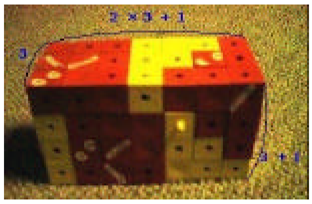
などです。三角形を正六角形の内部の正三角形に変換し，1 次変換によって変化しない「同一直線上の 2 つの線分の比」を用いれば一目瞭然となります。

4_2　Σk^2 の図的解釈(1)

和の 2 乗公式　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　を証明するのも教科書の方法では一苦労です。この和を次の図のようにピラミッド状に並べ，反時計回りの方向に 120°ずつ回転させたものを作ります。この 3 つの合計を取ることで公式の 2n＋1 が姿を現します。数式だけの無味乾燥な証明より，図を用いた分かりやすい方法の典型です。



4_3　Σk^2の図的解釈(2)

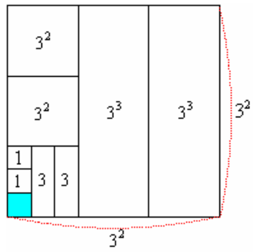


これも和の2乗公式を視覚的にとらえていこうという古典的な方法です。n^2個のブロックを6個作り，組み合せて直方体を作ります。作るのが大変なので 1^2，2^2，3^2個のブロック14個で1セットのピラミッドを作ります。これを6セット用意しましょう。このとき，3セットづつの色を変えておくのが細かな配慮です。(全部変えても良いですが)

この6セットを組み立て直方体を作成します。直方体の体積が，3辺の長さの積で求まることから公式を導きますが，ちょうど3辺が，n，$n+1$，$2n+1$ となっている事が見てすぐにわかります。色を変えておくと見やすくなるのがポイントですね。

実際に厚紙を用いて大きなブロックを作って教える先生もいます。

4_4　$\sum ar^{k-1}$の図的解釈



等比数列の和の公式は

$$S = a + ar + ar + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS = \quad ar + ar + \cdots + ar^{n-1} + ar^{n-1}$$

として，両辺を引くことによって得られます。ですからそれほど理解するのは難しくはありません。しかし，これを図を用いて別な角度から考えてみましょう。

1，r，r^2，r^3，…，r^{n-1}の面積を持つ正方形（長方形）の積み木を $r-1$ 個と面積1の積み木1かけらを組合せると，面積がr^n-1の正方形（長方形）が出来あがります。つまり公式の

r^n-1　の“－1”は長方形を作るために付け足す小さな1個の積み木

$r-1$　の“－1”は長方形を作るために一度に重ねる束の数

を表しているです。この積み木1かけらを付け足すことで正方形（長方形）ができるところがポイントですね。

5. 別な角度から考えよう

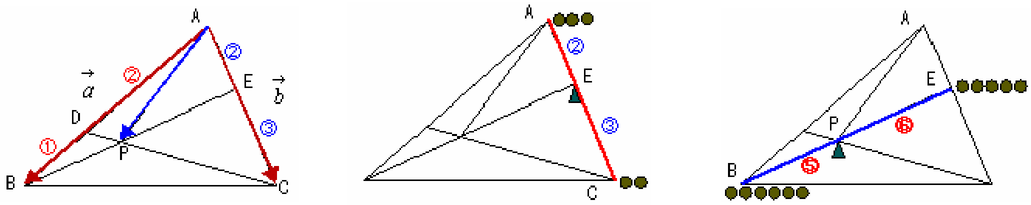
同じ問題でも色々な解法があるのが数学の特徴でもあり，魅力の一つでもあります。そんな別な視点から考える場合でも，計算ではなくもっと発想の転換をした方法で解ける問題もあります。そんな例をいくつか紹介しましょう。

5_1　一次独立を使う問題

次図左において$\overline{AP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$であらわす問題は，入試ではよく出る典型的な問題です。ベクトルの1次独立性を用いて解きますが，「つりあい」という観点から解くこともできます。

線分の内分点に「左右のおもりの数×支点からの距離」が等しくなるようにおもりをおいていくことで，最終的な“つりあい係数”を算出します。

この問題は初等幾何におけるチェバの定理，メネラウスの定理などとも関連する面白い内容だといえます。

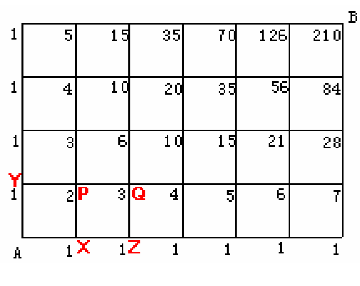


5_2　道筋の問題

格子状に並んだ道筋における最短経路の数を求める問題では，一般的には組合せの考えを用いたり，重複順列の考えを用いたりして求めます。これをパスカルの三角形を応用した方法で図を用いて考えさせてみましょう。

道筋の途中途中にそこまでの経路の数字を順に書き込んで行く方法ですが，この方法を用いると途中の 1 点を通る場合の数や途中経路が欠落した複雑な場合でも簡単に求めることができます。

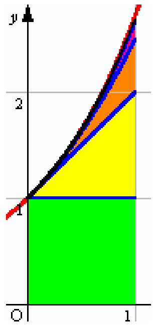
この方法を紹介する前に，イニシャルを用いた相性占いを紹介すると盛り上がるでしょう。最近はそんな占いを知らない生徒も多いようですが…。



5_3　CG で見るいろいろな変換

新教科「情報」における「図形と画像の処理」「コンピュータデザインの基礎」といったコンピュータグラフィックスに関する分野には，様々な数学的要素が盛り込まれています。そうした題材を探ることによって，逆に「数学」への題材として扱うことも可能になります。

数学分野におけるグラフの移動（数Ⅰ）や１次変換（数C）に関する問題は，数学では数式として扱うことが多いのですが，「情報」のように画像の変換として取り扱うことで，より具体的でイメージのつかみやすい題材となります。



5_4　積み木を重ねる

テイラーの展開公式をグラフの“積木”を用いて説明しようというものです。$y = x^n$ のグラフ（積み木）を色々と削りながら積み重ねて作っていきます。色分けすると見やすくなります。

6. イメージを大切にした教材

理解が困難な題材でも，たった 1 枚の図で理解できるようなこともあります。特にそれが手作業ではなかなか困難な問題になればなるほど，効果が現れます。そんな題材からいくつか紹介しましょう。

6_1　展開公式の図的解釈

展開公式でも 3 次となると覚えるのも一苦労です。それを 1 辺が $a+b$ の立方体を 8 つの直方体にわけたときの体積の和と考え，視覚的に説明します。同じ大きさの直方体の数を考えれば，公式の係数も覚えやすくなります。

6_2　2 次 3 項式の展開

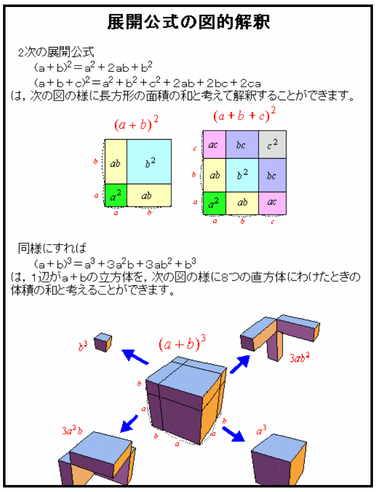
$(a+b)^n$ の展開式には有名なパスカルの三角形が現れます。これを$(a+b+c)^n$ まで拡張し立体的なパスカルの三角形から説明します。3 次元のパスカル三角形と言うことで頭の中で考えるのも一苦労ですが，1 枚の画像でイメージをつかむことができます。

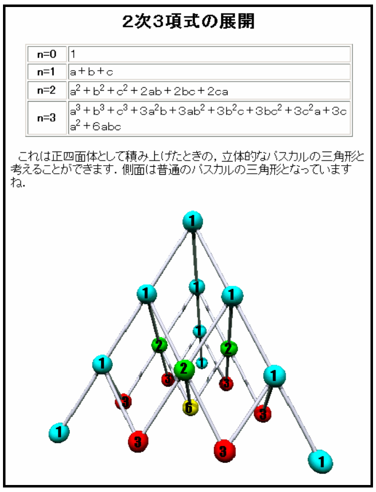
6_3　約数の個数

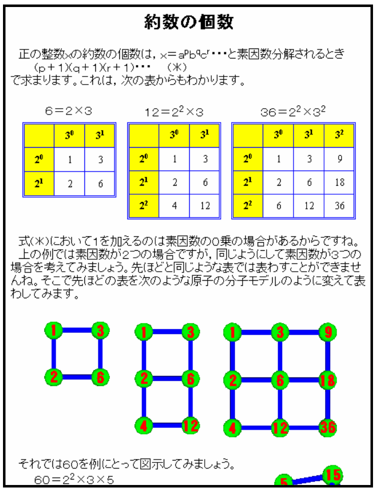
正の整数 $x=a^p b^q c^r \cdots$ の約数の個数は$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots$で求まります。2 つの素因数だけで分解できる場合は表を書いて説明できますが，3 つの素因数だとそうはいかなくなります。そこで 3 次元分子モデルを使って説明することでイメージ化します。

6_4　波面にみる 2 次曲線

池に小石を投げ入れるたときの波紋の干渉に 2 次曲線を見つけます。いわゆる“モアレ縞“に関する題材です。授業で 2 次曲線の定義をイメージさせるのは困難ですが，イメージ化の一助となります。



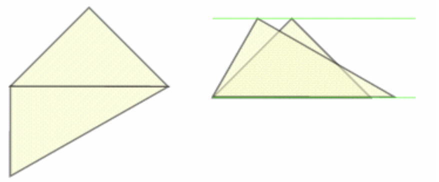




7．単純で手軽な話題

普段の授業の中で「ところでこんなの知っているかな？」と，ふとさりげなく問い掛けたりできるような，そんな単純で手軽な話題というものがあります。とりたててどうだという分けではないのに，案外印象に残る，そんな題材を紹介しましょう。

7_1　されど三角定規



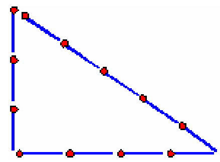
「三角定規の中で同じ長さの所があります。さてどこでしょう。」

授業で直角三角形を扱うことはよくあります。また教師用の大きな直角定規もありますね。市販の 2 枚 1 組の直角定規に関する，本当にさりげない話題です。しかし，なかなか 2 つの三角形の高さが同じだということに気づかない生徒も多いようです。

また三角定規には何故，丸い穴があいているのでしょう。このレポートを書いているときにちょうど，学童用のプラスチック製定規を製造している会社の方からメールを頂きました。この方のお話しによると，次のような理由があるそうです。（原文のまま）

> 三角定規に穴をあける事は義務付けられた事ではありませんで，メーカーの判断であけている物です。穴をあけるためにはコストがかかります。ですからわざわざ穴をあけているのには，それなりの理由があるのです。三角定規を使う時は，HP 上に書かれてあるように，2 つの定規を組み合わせて角度を作って線を引くのですが，たいてい右手には筆記具を持つ訳ですから，左手だけで定規を固定して線を引く事になります。穴のあいていない三角定規の場合は定規を上から押さえるだけではすぐにズレてしまいますので，定規の縁に指をかけて固定をします。しかしそれでも，引く線に対して斜めであったり，定規が大きいと線を引く所からだいぶ離れますので，うまく力が伝わらずズレてしまいます。穴があいていますと，そこに指が引っ掛けられ，定規の中央部分を押さえられるので，軽い力で無理なく固定する事ができます。ですから三角定規の穴はより大きくて，丸であるよりも定規と同じ三角形の方がより良いです。
>
> 線を引く辺と平行になった部分を指で押さえるとより効果的だからです。でも丸い穴の物も良く見かけますが，これは，丸穴は三角穴に比べて安く加工できるからで，コストダウンに過ぎません。小さな丸穴でも無いよりはマシです。
>
> 以前にも，TV や雑誌でおかしな理由付けをしていた事がありましたが，定規メーカーでも三角定規に穴をあけているのは昔からのことで，その理由は解らない所が多いです。でも，なぜと質問されると知らないとは言えずに，不正確な事を答えてしまったりするのかも知れません。

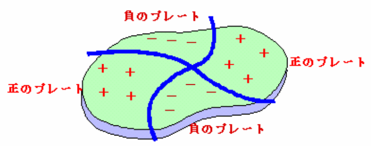
7_2　マッチ棒でつくる平面図形



マッチ棒が 12 本あると，授業で習うほとんどの図形が作れます。くだらない話題のようにも思えますが，実際にやってみると案外面白さがあります。

ここで何故 12 本か，ということを考えさせるのも面白いでしょう。これは古くから伝わるエジプト紐をマッチ棒に変えたものです。

7_3　正の領域，負の領域



全くたわいもない話題ですが，不等式の表す領域を電荷を持ったプレートとイメージさせることで領域内の性質を均一化させて考えていこうというものです。こう考えることで正のプレートと負ののプレートを結ぶ場合には必ず境界（0 の値）をとらなくてはならない事を説明します。

7_4　「1 倍」とはかけるいくつか

新課程に初めて登場する「数学基礎」。その中には数学史，特に和算に関する事柄も扱われます。和算の中でも特に有名な書物に吉田光由の『塵劫記』があります。『塵劫記』は江戸時代を通して，数学及び数学教育の基本で草分け的存在で，江戸の文化・学問のある一面を知る上で貴重な図書といえます。

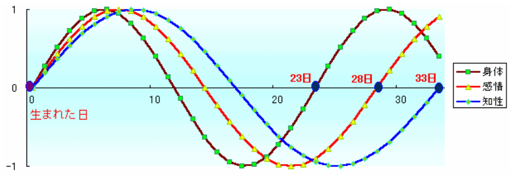
そこには位取りの話しなど様々な価値ある内容が盛り込まれています。そんな話題の一つです。明治になって西洋数学が教えられるようになってから，解釈の違いが出てきたようですが，この他にも 4 桁区切り，3 桁区切りの話題なども同様に明治になってからの変更のようです。

8. 日常的な題材

数学は他の教科の基礎となるような学問で，直接目に見える形で日常生活に役に立つものではありません。そのため数学を勉強して何の役に立つの？と思う生徒も多いと思います。そんな数学の話題にも日常の生活に関わるようなものも存在します。そんな題材を考えてみましょう。

8_1 生まれた日から決まるバイオリズム

周期関数を説明する場合，最も身近な例としてバイオリズム曲線があります。この曲線は自分が生まれた日を拠点に身体，感情，知性の 3 本の波長の組合せで出来ています。表計算ソフトを用いて簡単に自分のバイオリズムを計算できるので，是非試してみてください。



8_2 降水確率 30%

確率に関する事柄には日常生活に関する話題が多いといえます。天気に関する降水確率以外にも，宝くじに関する題材（最近では TOTO なども よく話題にのぼります）やポーカーなどのトランプのゲームに関するもの，クラスに誕生日の同じ人がいる確率など，様々な題材があります。

8_3 鈴木君と佐藤君

これも確率に関する題材の一つです。ただ単に同じ人のいる確率を取り上げるより，何か話題性をつけて取り上げるとより身近になります。題名の「鈴木君と佐藤君」は全国の名字ベスト 3 に入る名前ですが，こうした名字と関連させることで，より身近な話題となります。またテレビ番組で「鈴木君と佐藤君の 2 人が北海道の北端から沖縄の南端までを同じ性の人だけを頼りに自転車で旅をする」という企画が成立した理由付けにも使えますね。

8_4 対数はどんなところに使われているだろうか？

対数は生徒が苦手な分野の代表格ですが，具体的にどんなところで使われているかを考えるには目に見えやすい分野でもあります。特に最近は情報化時代における「情報量」の定義として活躍しています。情報量の性質としての①非負性②加法性③正規性なども，情報理論としては大事な性質となります。その他にも科学分野の様々な分野に使われていることを示すことで，より数学の有用性を理解させることができます。

9. 数学と折り紙

折り紙と数学の接点は…。小学校からおなじみの折り紙ですが，学年が上がるにつれやらなくなります。最近では高校生で「折り鶴」を折れる生徒がどれだけいるでしょう。それぐらい“日本人”と折り紙の距離は離れてきているのかも知れません。

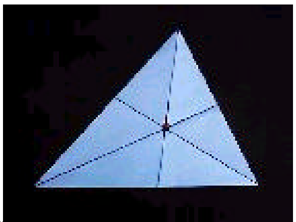
しかし，そんな折り紙に本当に多くの数理現象が潜んでいるのをご存知でしょうか。高等数学で扱う初等幾何に関する事柄はもちろん，平方根，方程式，多面体など折り紙で説明することができる事が数多くあります。また，手を使った作業ということで，これまでの数学にはない新鮮な驚きも生まれるてくるのです。

9_1 折り紙で作る内心・外心

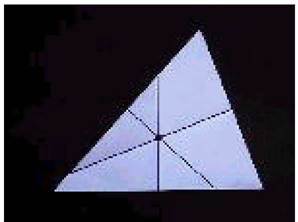
中学校で習う三角形の内心・外心の作図は，初等幾何では最も基本的な学習事項です。コンパスと定規で内心円や外心円の作図を習いますが，内接円などはきちんと描くのが案外面倒です。

しかし折り紙を用いると簡単にできるてしまいます。できた内心を頂点にして辺を合わせると長さがピッタリ合うことで，内心の半径が等しいことを実体験できます。

コンパスと定規ではかなりの手数が必要なものが，折り紙ではほんの数回で済んでしまうところもすごいですね。

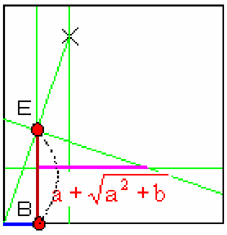



＝3 つの角の 2 等分線の交点＝

＝3 つの辺の垂直 2 等分線＝

9_2　2 次方程式の解を作図する



以前に岩手教育大で出題された問題で「方程式 $x^2-2ax-b=0$ の正の解を作図せよ。」というのがありました。長さが 1，*a*，*b* が与えられたとして，三角形の相似比を考えて問題を解いていきます。しかしこうした初等幾何の問題は，折り紙が最も得意とする分野です。紙が 1 枚あれば，簡単に解を折って示すことができます。方程式の解を“解く”のではなく“折る”というところが新鮮で面白いのではないでしょうか。

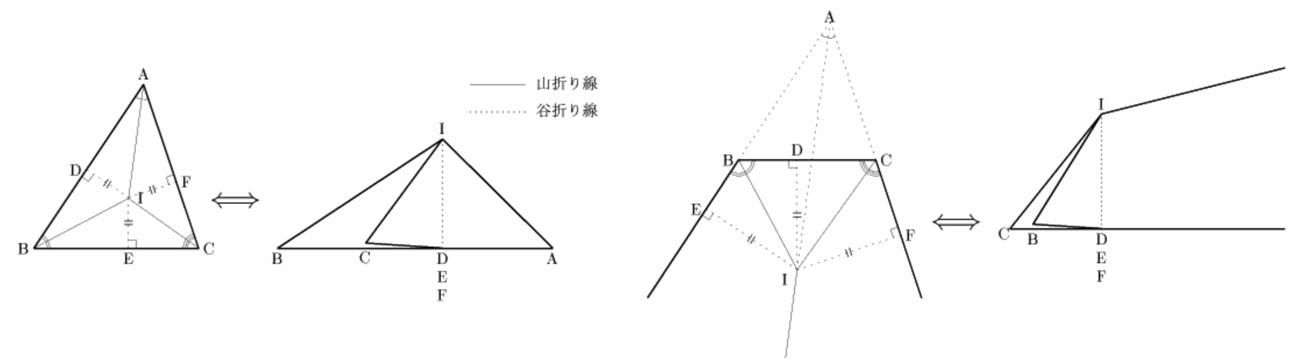
9_3　一発で切る！

カナダの 17 歳（当時）の大学生が証明したといわれる「一刀両断」の問題です。「直線でできた多角形は適当な折り方をすると各辺が一直線に並ぶ」というものです。

最初に複雑な図形で生徒に提示すると，生徒は思わず歓声をあげます。複雑な図形を折ることはかなり大変なので，六角形ぐらいの図形で実際に折らせて見ましょう。最後に直線が真っ直ぐに並んではさみを入れることができるととても感動しますよ。

＝線分でできたスワンを一発で切る！＝

原理を簡単に説明しましょう。三角形は内心を頂点として下図のようにたたむことができ，3 つの辺は一直線上に重なります。このとき内心と頂点を結んで折りたたむと，垂線は自動的に決定します。また開いた図形には三角形を想定して，その傍心を頂点として折りたたむことができ，3 つの辺は一直線上に重なります。このとき，交点と各頂点を結んで折りたたむと，延長線の折り目がが自動的に決まるります。

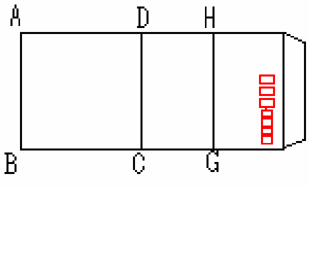


9_4　封筒で作る黄金比

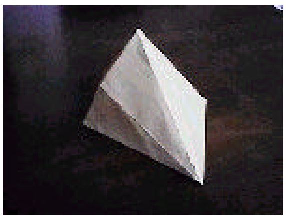
自然界にも数多く存在し，そのバランスの美しさから名のついた「黄金比」。縦と横の比が黄金比になっている長方形を，どこにでもある封筒を用いて作成してみましょう。

身の回りにも黄金比を持つものがいくつもありますが，封筒で作成した長方形が名刺と同じ形をしていることを説明します。

黄金比を数学の話題として初めて提起したのは，ユークリッドとされています。「線分を 2 つに分かち，小さい方の線分と全体とでできる長方形の面積と，大きい方の線分でできる正方形の面積が等しくなるように分けよ。」というものでしたが，黄金比にも様々な魅力が隠されています。



9_5　即席！テトラパック



「三角パック」でおなじみの四面体の“テトラ･クラシック”は，ある年代の方々には学生時代を思い出していただける懐かしい容器です。ちなみに“テトラパック”というのは商標だったのをご存じですか。

そんなテトラパックを折り紙を用いて作成してみましょう。実際にはのりしろの部分をとらなくてはならないので案外複雑になっています。

10．新科目「数学基礎」のねらいと内容

新教育課程ではこれからの学校教育のあり方として「ゆとりの中で自ら学び自ら考える力など［生きる力］の育成」を目指しています。そして教育内容がかなり厳選されると同時に，基礎・基本の徹底，一人一人の個性を生かした教育の推進が図られることとなりました。そうした背景の中，新科目「数学基礎」が登場してきたのです。

10_1　何のための新科目設置か

新課程では特に「ゆとり」「主体的に問題を解決する行動」「学ぶことに楽しさと充実感」といった点が強調されています。こうした基本方針を踏まえ，「数学基礎」の目標として，次のように示されています。

> 数学と人間とのかかわりや，社会生活において数学が果たしている役割について理解させ，数学に対する興味・関心を高めるとともに，数学的な考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。

これまでの体系的に学習してきた数学とは違い，より社会生活に密着し，興味・関心を高めることができる内容を扱うことをねらいとしています。こうした新科目の設置によって進む「理系離れ」を少しでも食い止め，数学の学習の面白みを再認識することができればと思います。

10_2　具体的にどんな内容を学ぶのか

では具体的にどんなことを学ぶのでしょう。新学習指導要領では「 (1) 数学と人間の活動」「(2) 社会生活における数理的な考察」「(3) 身近な統計」という幅広い内容を示しています。細かく見ていくと，次のようになります。

> (1) 数学と人間の活動
> 　数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し，数学に対する興味・関心を高める。
> 　ア　数と人間　　　イ　図形と人間
> (2) 社会生活における数理的な考察
> 　社会生活において数学が活用されている場面や身近な事象を数理的に考察することを通して，数学の有用性などを知り，数学的な見方や考え方を豊かにする。
> 　ア　社会生活と数学　　　イ　身近な事象の数理的な考察
> (3) 身近な統計
> 　目的に応じて資料を整理し，それを表やグラフなどを用いて整理するとともに，資料の傾向を代表値を用いてとらえるなど，統計の考えを理解し，それを活用できるようにする。
> 　ア　資料の整理　　　イ　資料の傾向の把握

更に数研出版の教科書「楽しく学ぶ数学基礎」で扱っている内容を見てみましょう。全部で4章に分かれています。

第1編　数学を楽しもう
　路線図の形，鉛筆を回して角度を測ろう，タイルを敷きつめよう，テレビの大きさと面積・体積
　折り紙で三角形の秘密を探ろう，いろいろな量の求め方，日本の数学「和算」1
第2編　数学を役立てよう
　分数を知ろう，2^nの世界，利息の数学，可能性を探ろう，ウソつきとパラドックス，日本の数学「和算」2
第3編　数学の歴史を訪ねよう
　ピタゴラスの定理，シルバー比と黄金比，円周率の歩み，地球を計算しよう，大工たちの数学
第4編　資料を調べよう
　資料を調べよう，資料を比べよう，資料の傾向を調べよう

例えば「路線図の形」では一筆書きの話題をもとに，一筆書きができる図形とできない図形の性質を調べます。「テレビの大きさと面積・体積」では身近にある相似な図形についての面積比・体積比を求めます。「折り紙で三角形の秘密を探ろう」では折り紙を用いて三角形の内心・外心などの三角形の性質について調べます。

このように数学に関する様々なトピックを通して，数学的な見方・考え方を養うと同時に，数学に対する興味・関心を持たせることを目的とした内容となっています。こうした内容は今回このレポートで扱っている数学通信『数学玉手箱』と合い通じるものがあるといえます。

11．おわりに

数学を教える場合に最も難しいと感じるのは「数学」と「教育学」との間に“はさまれた”題材を扱う場合だと思います。その典型的なものが「無限」に関する事柄です。高校では無限に関する厳格な定義は行いません。ですから区分求積を用いた積分の定義に関しても，あるところからは「ごまかし」が入ってきます。微積に関する以外にも数多くそんな場面に出会います。どうしても高等学校の数学を教える場合には，ある程度の「あいまいさ」「ごまかし」のようなものが入らざるを得ないのではないでしょうか。

『数学玉手箱』で取り上げた題材の多くは，イメージを大事にしたものが多いため厳密性に欠けているものが多いと思います。しかし数学に対する興味・関心を持ってくれる“きっかけ”に，少しでもなってくれればと思っています。どの話題も見なれたものも多いのですが，生徒は新鮮に感じ取ってくれるようです。また Web で公開しているため，メールで感想を送ってくれる方もいます。

数学の教師にとって，様々な題材にいつもアンテナを張って数多くストックしていくことが大事なのではないでしょうか。情報化に対応した先進的な指導法も大事ですが，こうしたアナログ的な方法は教育の原点であるような気がします。