

数学科教育法 数学基礎論
コンピュータを用いた数学教育
札幌新川高等学校 早苗 雅史

1 はじめに

インターネットが教育に登場してまだ数年しかたっていませんが、いま学校現場は更なる“急激な変化”を迎えようとしています。「教育の情報化」プロジェクトにより校内 LAN 整備が進み、全ての教室からインターネットへの接続が可能になります。更に光ファイバー施設によるブロードバンド化により、教育用の画像コンテンツ配信やテレビ会議システムを導入した授業等の可能性が生まれてきました。

ネットを通したプレゼン型の授業スタイルが当たり前のように行われるかもしれません。これまでのチョークと黒板という授業スタイルも変化しようとしています。

当然“わかる授業”の提供には、コンピュータを用いた授業に関わらず、興味・関心を引くような教材の開発や分かりやすい教授法の工夫が不可欠です。しかし、これだけ教育の世界にも情報化が進んできている現在、こうした“情報化”という流れから目をそむけて教育をしていくことがもはやできない時代に来ているのも確かです。

コンピュータを用いた数学教育の目的、必要性は何か。どういったことができるのか。基本的な考え方をもとに、コンピュータを用いた数学教育を具体例で考えてみましょう。

2 コンピュータを授業で利用する目的

数学の授業の中でコンピュータを活用している人は、実質的にはそう多くはないと考えられます。その原因としては、基本的に必要ないと考えている、効果的だと思ってもスキルが不足している、またはスキルはあっても手軽にできる環境がない、など様々なものが考えられます。

また、コンピュータを授業に用いるといってもその方法は色々あります。直接生徒が自らコンピュータに触れて操作するものから教師が提示用として使用するもの、更にはプリントとして活用する場合など様々です。

まず、何のためにコンピュータを利用するかという基本的な押さえをしっかり持つことが大事だといえます。コンピュータを授業に用いる基本的な利点としては、次の点が考えられます。

- ・生徒の授業理解度を高めるため

教える題材の中には板書だけでは伝えきれない場面に遭遇することが多くあります。例えば、グラフや図を多く用いる題材や3次元空間などではコンピュータは効果的です。

- ・発見学習的な要素

シミュレーション型のソフトや図形作図ツールなどでは、コンピュータを通して得られたイメージやデータから数学的な考察を行うことが可能です。

- ・科学的な思考力の育成

現在、数学A、B、Cにおいて導入されているアルゴリズム関係では、数学的な要素を通してコンピュータの仕組みを知ると同時に、科学的な思考力の育成を目指しています。

- ・生徒に数学に関する興味や関心を喚起するため

情報化や社会の変化に伴い数学の必要性が増してきているにも関わらず、生徒たちの数学離れが確実に進んできテーマ。「数学に対する興味・関心」の芽を大事に育ててあげることも大事です。

- ・ネットを通した教材研究

ネット上に存在する様々な数学の題材を調べ、数学に潜む魅力を探求することができます。

ここではコンピュータの活用例として、どういった場面でどのように使用することができるのかを具体例をもとに考えてみたいと思います。

3 数理科学としてのコンピュータ

次期カリキュラムでは「数学B」の中で、数値演算やアルゴリズムを扱う内容が盛りられています。こうした内容は新教科「情報」における「アルゴリズムの基礎」とも重なる内容です。こうした数理科学としての内容を真正面から扱う実践を考えてみましょう。

3_1 新課程におけるコンピュータの扱い

平成15年度からの新課程においては「数学B」のおいてのみ、コンピュータに関する内容が扱われます。内容としては「(3)統計とコンピュータ」における資料の整理及び分析への活用と、「(4)数値計算とコンピュータ」における簡単なアルゴリズム理解の2箇所です。

(3) 統計とコンピュータ

統計についての基本的な概念を理解し、身近な資料を表計算用のソフトウェアなどを利用して整理・分析し、資料の傾向を的確に捉えることができるようにする。

(4) 数値計算とコンピュータ

簡単な数値計算のアルゴリズムを理解し、それを科学技術計算用のプログラミング言語などを利用して表現し、具体的な事象の考察に活用できるようにする。

ア 簡単なプログラム

イ いろいろなアルゴリズム

(ア) 整数の計算

(イ) 近似値の計算

簡単なプログラムでは2次方程式の解を求める手順や1から10までの平方和を求める手順などを扱います。また整数の計算ではユークリッドの互除法などを扱い、近似値の計算では2次方程式の近似解を2分法を用いて求めたり、2次関数で囲まれた面積を台形公式を用いて求めたりする内容が入ります。

3_2 新教科「情報」とアルゴリズム

新課程では新しく「情報」という教科が新設されます。特に現行課程の数学に関する内容と関連する部分は「情報B」の「(2)コンピュータの仕組みと働き」における簡単なアルゴリズムの部分です。

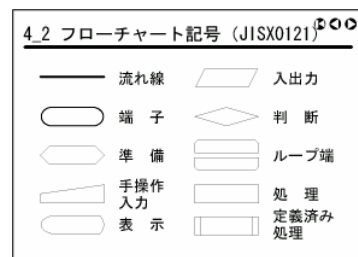
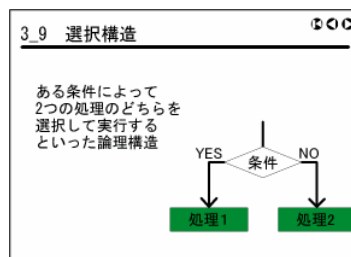
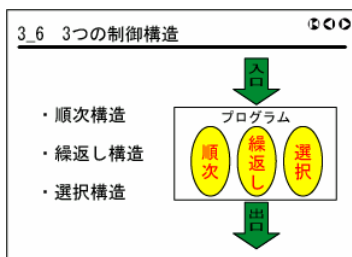
(2) コンピュータの仕組みと働き

イ コンピュータにおける情報の処理

コンピュータの仕組み、コンピュータ内部での基本的な処理の仕組み及び簡単なアルゴリズムを理解させる。

具体的には入力・出力、記憶、演算、制御機能の役割の理解、処理手順を明確に記述することの必要性、並べ替えや探索などの基本的な実習、表計算ソフトの表機能の活用などがあげられます。

特に基本的なアルゴリズムでは集計処理（最大値・最小値、データの合計・平均）、整列（交換法、選択法、挿入法）、探索（線形探索、二分探索）を扱います。使用する言語は、生徒の実態や興味・関心、各学校の実情（購入費用など）に応じて選択することとなっています。



3_3 具体的な内容

それでは具体的にどのような内容を扱ってあげればよいでしょう。大きく分類すると、次のような内容があります。特にグラフィックスは教科書では曲線の描画ぐらいしか扱っていませんが、最も生徒が関心をもって取り組む分野なのでできるだけ取り上げると良いと思います。

プログラミングの基礎

変数と式，代入文・入力文，繰り返し処理，条件判断，配列変数など
アルゴリズムの基礎

最大・最小値・平均値，並べ替え，検索など

数値演算

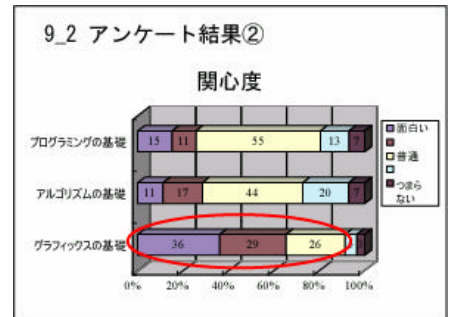
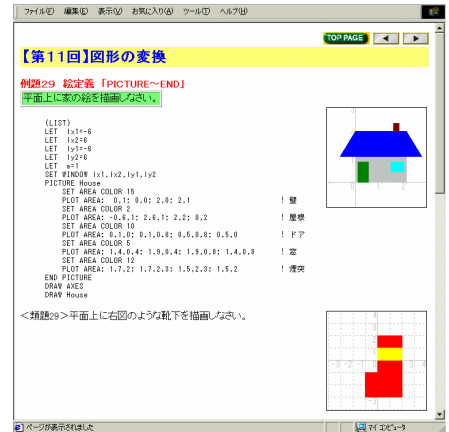
約数・素数，数列への応用，関数値の計算，近似値，区分積法など

グラフィックス

グラフィックスの基礎，曲線の描画，図形の変換など

統計処理

資料の整理，確率分布，統計的推測など



3_4 授業の進め方

授業の具体的な進め方について考えてみましょう。環境整備が進む中，授業の進め方もより機能的で効率の良いやり方が求められてきています。実際の実践例をもとに，主として次のような大まかな流れが考えられます。特に課題提出や演習問題（オリジナル作品作成）などの場合にはインターネットの利用は便利である。

(1)例題の説明

最初にテキストの例題を教師が説明する。必要に応じて，黒板での説明，ディスプレイ上での説明（一斉送信）を与える。

(2)課題の演習

説明を受けた後，生徒は例題に沿った類題問題を行う。教師は必要に応じて期間巡視しながら，生徒の質問に答える。

(3)課題の提出

課外を終えた生徒はソースプログラムを自分のフォルダに保存。その後，メールで作成したファイルを添付して教師側の指定したアドレスまで送付する。教師は送られてきた課題を確認し，チェックする。

(4)演習問題（オリジナル作品作成）

演習課題を作成し，できた作品（ソース，画像など）を HTML 化し指定されたフォルダに保存する。

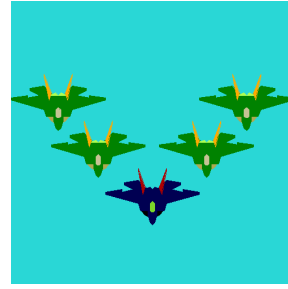
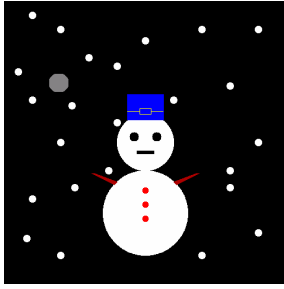
3_5 プログラミング言語ソフト「十進 BASIC」

こういったプログラミング言語を扱うかは，生徒の実体や興味・関心によって選択することが基本ですが，ネット上からダウンロードでき，JIS Full BASIC に準拠した言語「十進 BASIC」を紹介しましょう。

「十進 BASIC」は文教大学教育学部の白石和夫先生が作成したフリーのソフトです。特に十進 BASIC を授業で使うときの利点としては，次の点が挙げられます。

- ・ Windows 上で動く著作権フリーのソフトである。また Windows のシステムを変更しない。
- ・ ネット上からダウンロードできるため，常に最新のバージョンで使用できる。
- ・ Delphi で作成されているため非常に軽く，またソフトのインストールが簡単。
- ・ 教育課程で想定されている言語 BASIC にほとんど近い。
- ・ 構造化プログラミングが可能。
- ・ 絵定義を用いてグラフィックの変換が容易。
- ・ エディタ画面，グラフィックス画面などが分かれていて，編集がしやすい。

特に独自の機能である「絵定義」の機能は、グラフィックを身近なものにしてくれます。



= 十進 BASIC を用いたグラフィック（生徒作品例） =

3.6 評価問題について

一般的なアルゴリズムや数値演算に関する評価問題は、センター試験を初めとしてすでにパターンが定着しています。ではグラフィック関係を扱う場合にどのような評価問題が考えられるでしょうか。実はCGやコンピュータデザイン分野では数多くの数学的な考えや計算が使われています。2次元図形の変換、集合演算(CGではCSG: Constructive Solid Geometryという)、空間の座標系、切断面、関数・数列などのデザインへの応用、造形に現れる著名な曲線・模様など数学とCGとの関連は数多くあります。次にあげるのは数列的な考えをもとに直線を作成させるプログラムです。

次のプログラムは下の(1)~(3)の直線を描画するものである。それぞれのグラフに対して、空欄を埋めよ。ただし PLOT LINES : x1 ,y1 ; x2 ,y2 で、2点(x1 ,y1), (x2 ,y2)を線分で結ぶものとする。

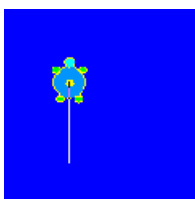
```

SET WINDOW -3,9,-1,16
DRAW AXES
LET Y=0
FOR I=1 TO 5
  (1)
PLOT LINES : 0,Y;5,Y
NEXT I
END
  
```

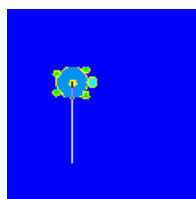
3.7 教育用言語「LOGO」

LOGOは1967年ごろアメリカのMITのシーモア・パパート教授らが開発した教育用コンピュータ言語です。主役は“亀(タートル)”です。ですから亀の立場に立って命令を与えることになります。つまり長さや角度を与えて亀を動かして行くことになるわけですが、現在の亀がどちらの方向を向いているのか、をいつも意識しながら命令を与えないといけません。“まえへ 100”とか“みぎへ 90”等と日本語で命令を与えることができるため、小学生にも簡単に操作できるようにになっています。なんととっても亀さんがかわいいので、親しみやすく学習できるといえます。また繰り返し命令を用いることで簡単なプログラミングも可能で、再帰図形作成などには特に効力を発揮します。

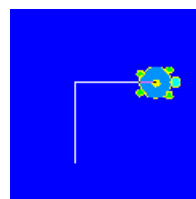
フリーソフト「ロゴ坊」は兼宗進氏が作成された Logo です。ネット上からダウンロードできるフリーソフトなので是非試してみてもは如何でしょう。



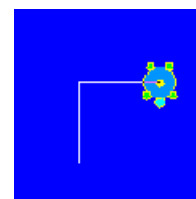
まえへ 50



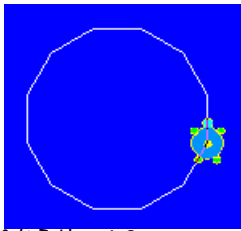
みぎへ 90



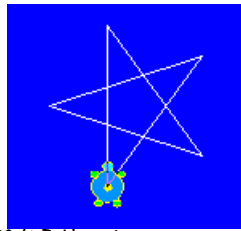
まえへ 50



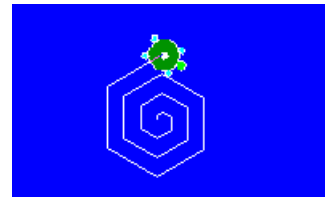
みぎへ 90



くりかえせ 1 2
[まえへ 3 0
ひだりへ 3 0]



くりかえせ 4
[まえへ 5 0
みぎへ 9 0]



てじゅんは うずまき :A
えをもとへ
へんすうは "L 2
えがく :L
おわり
てじゅんは えがく :L
もし :L > 4 0 「とまれ」
まえへ :L みぎへ :A
えがく :L + 2
おわり

4 発見学習としてのコンピュータ

数学の授業の一部分において生徒が自らコンピュータを操作し、数学の題材を自ら考えていく、そんな活用法をいくつか紹介しましょう。

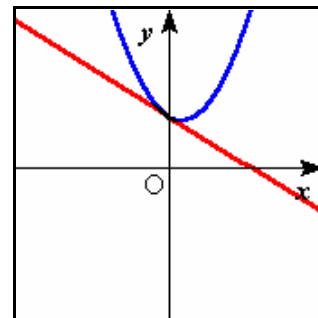
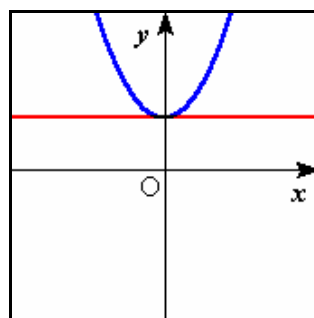
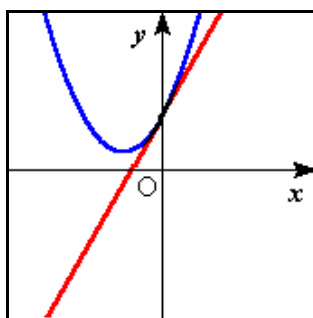
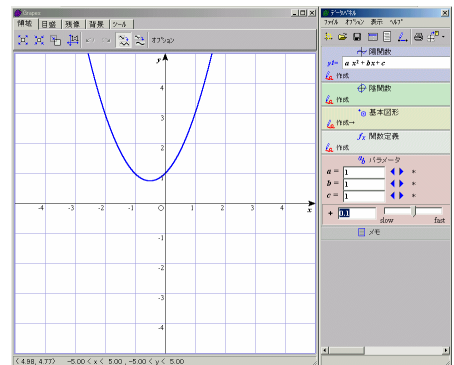
4_1 2次関数における係数の働き

2次関数の一般形 $y = ax^2 + bx + c$ 、標準形 $y = a(x - p)^2 + q$ における各係数の持つ意味を考えさせます。数 における学習では最も基本的な場面での使用といえます。

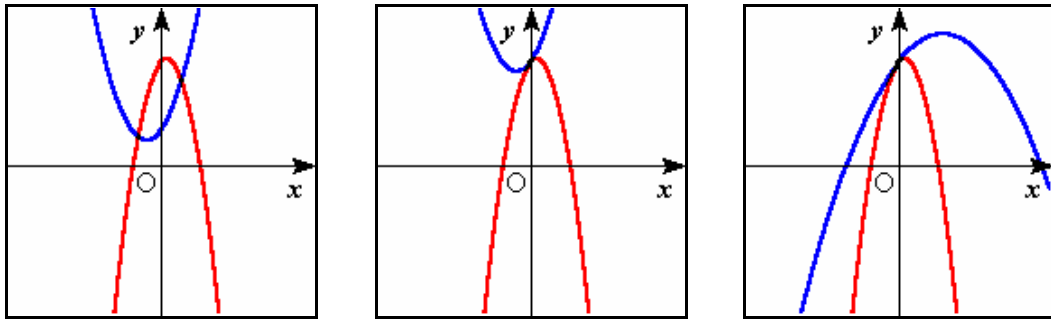
関数のパラメータを変化させることによって得られるグラフから、まずはデータを収集させ、その後に生徒にいろいろと考察させます。

コンピュータを用いることで、一般形から導入することも可能になります。一般的な形から導入する方がより自然で、特にパラメータ b の役割が生徒に問題意識を持たせます。標準形での動きの単純さが引き立つことにより、標準形の重要性が感覚としてわかります。

2次関数の一般形のパラメータ b の持つ意味はなかなか難しいところですが、「和関数」の考え方を補足として説明すると教科書と違った観点での説明ができます。 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを $y = ax^2$ と $y = bx + c$ のグラフの和関数として考え、 y 軸上の切片 c で $y = bx + c$ の直線に接するというを、パソコンでパラメータを変えながら提示します。



また、和関数の考えを用いて係数を変化させ、与えられた2次関数のグラフを作成させるのも、生徒に興味・関心を持たせます。次の図はパラメータを変化させて1つのグラフを他のグラフに近づけていくものです。原理が分かっていると案外難しい問題です。



友田勝久先生が作ったフリーウェア「Grapes」では

- ・ Delphi で作成されているため実行ファイルのみで動作する。また、サイズが小さくフロッピー一枚に収まる。
- ・ 陽関数、陰関数、極方程式、不等式の表す領域などをサポート。
- ・ パラメータを変化させることでグラフの変化が読み取れる。
- ・ 残像表示やスクリプトでアニメーションもできる。

など、とてもフリーソフトとは思えないような豊富な機能を備えています。

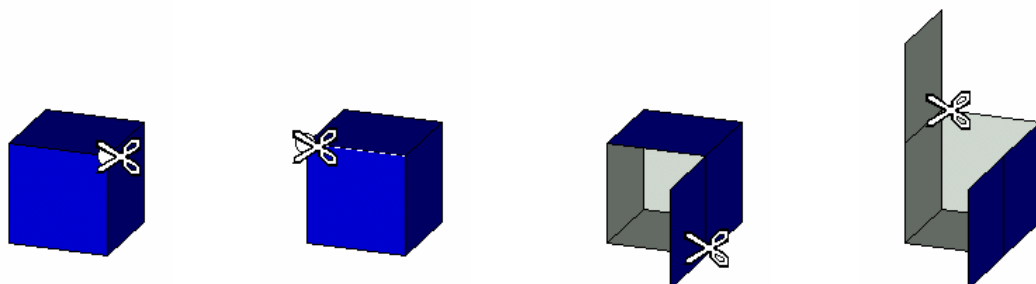
4.2 空間図形の断面図や展開図

空間図形の切断面をイメージさせることは、板書ではとても限界がある内容といえます。こうした題材においてはコンピュータは大きな威力を発揮するといえます。

立方体の断面図には 11 種類の図形（等脚台形を含めると 12 種類）があらわれますが、それを生徒に探させてみましょう。立体上の 3ヶ所を指定することにより、任意の位置で図形を切断させます。



同様に空間図形の展開も生徒にとっては苦手な問題の一つです。立方体の展開図にはやはり 11 種類存在しますが、様々な角度から立体を眺めながら、展開図を探してみましょう。展開後、頂点や辺がどのように接していたかを調べることができます。



徳野行太氏の作成したフリーソフト「Virtual Solid」で利用可能な立体としては、正多面体・角柱・角錐・球があります。また、立体の面ごとに自由な色を割り当てたり、切断面を真正面から見ることができなどの工夫がなされています。空間図形の導入部分において、立方体の展開や切断面の学習に大変役に立ちます。小学校高学年から導入される内容ですが、現在の生徒にとってはこうした空間把握はとても苦手な分野のようです。展開も切断も全ての場合を生徒に発見させることはかなり困難な状況です。とても 1 時間ではこなしきれない課題といえます。

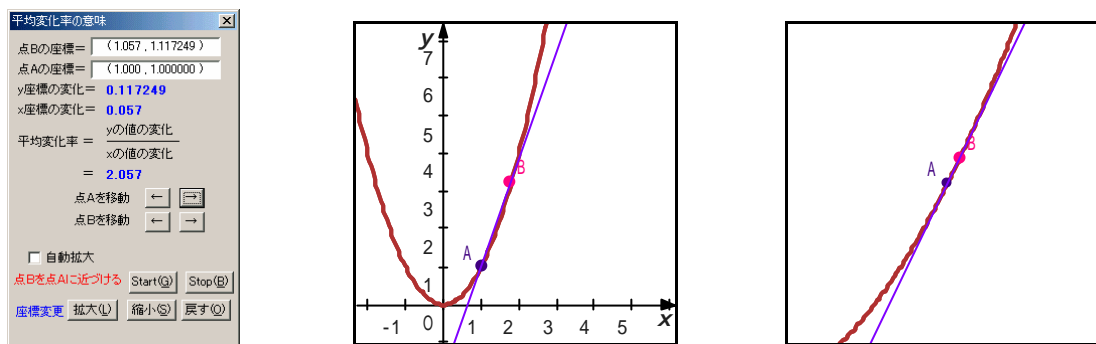
5 提示用教材としてのコンピュータ

次に授業における提示用教材としての活用法を、いくつかの具体例をもとに考えてみましょう。構内 LAN 整備が進

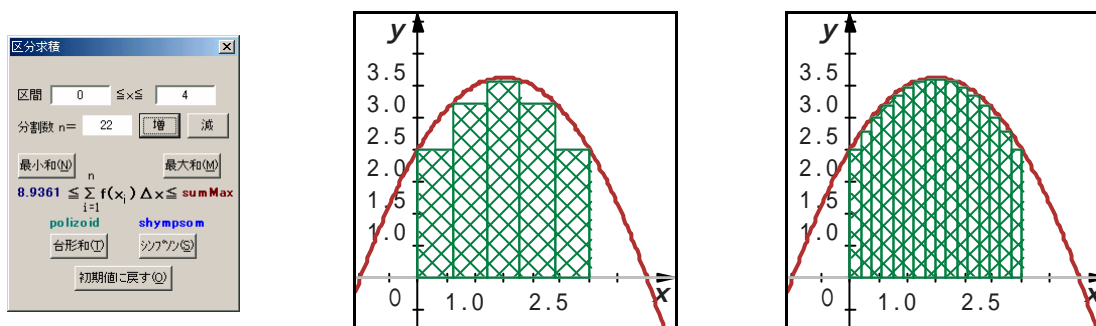
む中、プロジェクトを用いた「解説型」「問題提示型」での利用がこれからのコンピュータ利用の中心となることは明らかです。提示用教材としての活用は様々な題材が考えられますが、そのうちのほんのいくつかを紹介します。

5_1 平均変化率，区分求積に関する題材

微分・積分の分野で接線の変化や平均変化率に関する説明は板書ではなかなか限界がある分野です。それは動きを伴うため、説明するのが難しいからだと言えます。次の図は曲線上の1点を他の点に限りなく近づけたときの様子をアニメーションで提示したものです。同時に平均変化率の変化の様子を知ることができます。

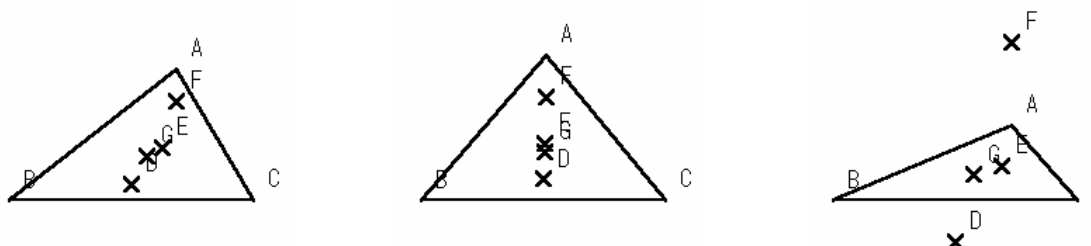


次の図は区分求積法（最小和）を用いて分割数と面積の関係を提示させようというものです。群馬県立桐生工業高校の和田啓助先生が作成されたフリーウェア「Function View」は、現場で授業を担当する高校数学教師が作成したプログラムのため、実際の授業を想定した機能が最初から備わっています。特にアニメーションなどの作成が簡単にできるところが最大の魅力だといえます。



5_2 三角形の5心の性質を探索する

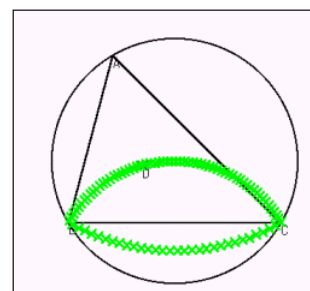
三角形の5心の性質を考えさせる問題です。次の図は三角形の外心，内心，垂心，重心の4点を同時に取ったものです。どの点が5心のどれにあたるかを三角形の頂点を動かすことで考えさせます。また「4つの点をグループ分けするとどうなるか」といった発問も有効的でしょう。5心の性質をこれらの変形を通して探索させることに意味があります。



新課程ではこれまでの中学校における初等幾何の分野の多くが高校に移行されます。愛知教育大学の飯島康之氏が作成した図形作図ツール「Geometric Constructor」は、こうした発見学習的なコンピュータの使用法に大変威力を発揮す

るソフトです。また GC/Java によってネット上からでも操作することができます。何より豊富な事例集を備えているため、まさに実践に即したツールといえるでしょう。

右の図は三角形の内心の描く軌跡を探求しようとしたものです。「軌跡はなぜこの形になるのでしょうか。何かの一部ようですが、さて何の一部でしょう。」こうした作図ツールにおいては発問の仕方も非常に大事になってきます。



5_3 複素数に関する題材

先ほどと同様 GC を用いて作成した題材です。GC には複素数に関する四則演算及び反転に関する作図機能を備えているため、複素数に関する教材が簡単に作成できます。大事なのはどれだけ面白い教材が作成できるかという中身にかかってきます。次に複素数に関する2つの題材を紹介します。

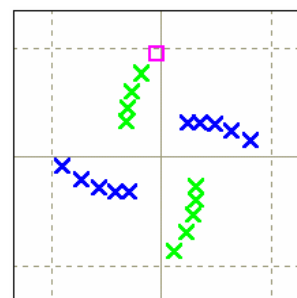
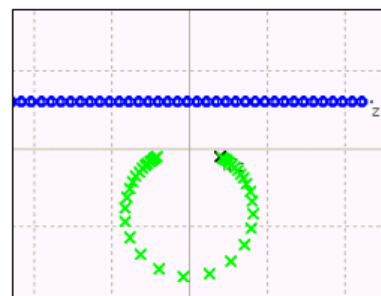
「 $w = \frac{1}{z}$ による変換で複素数 z はどう変換されるでしょう。」

これを 点 z が直線上を動くとき（直線が原点を通らないとき、通るとき）

点 z が円周上を動くとき（原点が円の外部にある場合、内部にある場合、原点を通る場合）などでシミュレートして考察してさせましょう。

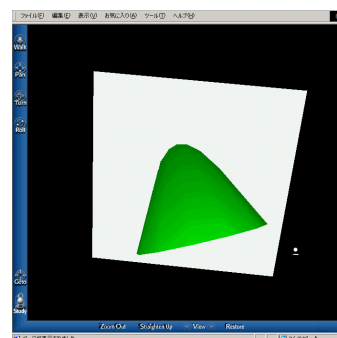
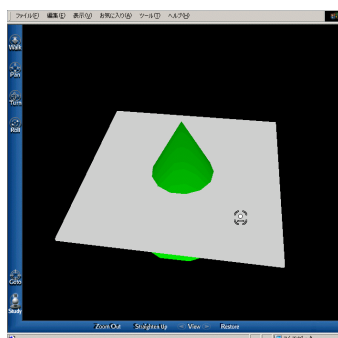
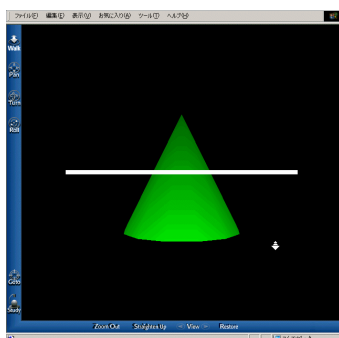
「複素平面上の点 z と、 $z^2, z^3, z^4, \dots, z^{10}$ の9個の点をとります。全てが重なるようにするにはどうしたらよいでしょう。また2群、5群に分けるにはどうしたらよいでしょう。」

奇数冪と偶数冪の色を別々に設定して様子を見ると分かりやすくなります。 $z^n = 1$ の解の意味を視覚的に理解することができます。



5_4 円錐曲線をシミュレートする

円錐曲線としての2次曲線の説明をする場合に、空間図形のイメージ化をさせることはなかなか難しいものがあります。板書での説明が大変なためです。様々な角度から切断面にあらわれる図形を観察し、どういう風に切断すればどういった2次曲線が現れるかを理解しなくてはなりません。次の図はブラウザ上にVRMLで作成した円錐と平面を表示し、マウスで平面や全体を回転させながら切断面の様子を考察するものです。



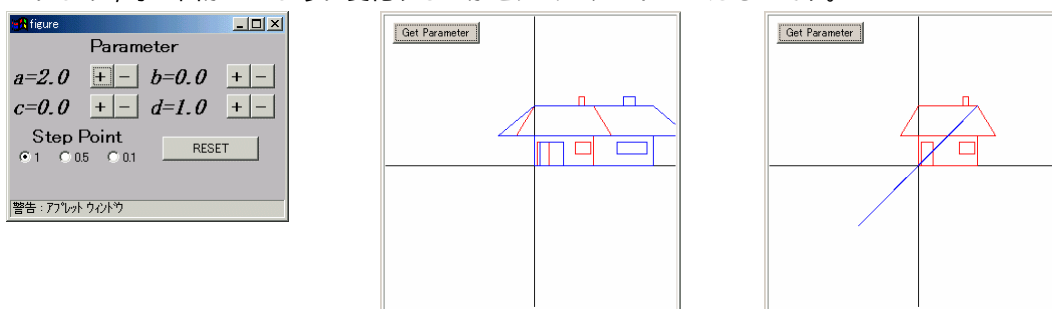
構内 LAN 整備に伴い教室にもインターネット環境が整うことを考えれば、ネット上でブラウザできる教材は大変魅力があります。VRML(Virtual Reality Modeling Language)はHTMLの3次元版であり、インターネット上でサイバースペースを構築するための言語です。言語といってもCや他のコンピュータ言語のようなプログラミング言語ではなく、「シーン記述言語」と呼ばれるものです。VRMLのイメージは、まず一つの風景(シーン)があり、その中にいくつものオブジェクト(ノードという)が配置される、といったところでしょうか。VRMLファイルはコンピュータに理解可能なオブジェクトの集合に変換され画面上に表示されます。つまり、プラットフォームに独立なのです。

まさにコンピュータグラフィックス向けに特化したもので、豊富なモデルを容易に生成することができる組み込み機

能を多く備えています。なによりテキストベースで作成し、読みとり可能なブラウザがあれば、すぐに表示できるところが手軽で使いやすいといえます。

5_5 作用素としての行列の役割

作用素としての行列の役割をイメージ化させるためには点や直線を変換させるより、身近な画像を変換させる方が有効です。対称移動、拡大・縮小、ずらし変換、回転移動、退化する変換などの基本的な変換と行列がどのような関係があるかをパラメータの変化とともに考えさせましょう。次の図は自作の Java アプレットを用いて、パラメータを変化させることにより、家の図がどのように変化するかをシミュレートさせたものです。



プログラミング言語 Java の特徴を大まかに列挙すると次のようになります。

- Architecture Newtral

Java 環境においては、各アプレットは Java Virtual Machine という仮想のコンピュータ上で動作します。そのため、機種や OS に関係なくそのまま利用できます。

- static から interactive へ

サーバーが必要なプログラムを、自分のブラウザ上で動作させることが可能です。

- object 志向, class 継承

プログラムを明確化, そして簡素化する事ができ, プログラムの再利用や管理・開発が容易になりました。

- byte type

Java は直接メモリ上に書き込まないために、非常に安全性が高い。Java 自体はアプリケーション作成の言語としても用いることができるため、教育用の言語としての可能性も秘めています。

6 教材作成としてのコンピュータ

6_1 イメージを多用した数学通信

教科書では直接扱わないようなものでも、内容的に面白ければ生徒は関心を持ちます。特に最近の生徒の傾向としては図やグラフなどのイメージから理解していく傾向が見られます。そのため、数学通信やプリントなどの補助的なプリントに視覚的なイメージ図などを作成して挿入することは大変効果的です。直接授業においてコンピュータを使用するわけではありませんが、教材作成の一方法として、特にイメージ図作成のためにコンピュータを活用することで生徒の理解度の手助けとすることができます。具体例として Web 型数学通信「数学玉手箱」の中からいくつか見てみましょう。

- 展開公式の図的解釈

$(a+b)^3$ の展開公式を, 1 辺が $a+b$ の立方体を 8 つの直方体にわけたときの体積の和と考え Visual に説明します。

- 0^0 をイメージ化する

指数の学習で $a=0$ のとき $a^0=1$ と習いますが, 0^0 はいくらになるのでしょうか。3次元図形をもとに Visual に説明します。

- 波面にみる 2 次曲線

池に小石を投げ入れたときにできる波面。その中に隠れている 2 次曲線を考えます。

・約数の個数

正の整数 $x = a^p b^q c^r \dots$ の約数の個数は $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ で求まりますが、これを 3 次元分子モデルを使って説明します。

・合成の公式の視覚化

三角関数の合成の公式の意味を、ベクトルを用いて視覚的に説明します。

・2 次 3 項式の展開

$(a+b)^n$ の展開式に現れるパスカルの三角形。これを $(a+b+c)^n$ まで拡張し立体的なパスカルの三角形から説明します。

展開公式の図的解釈

2次の展開公式
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 は、次の図の様に長方形の面積の和と考えて解釈することができます。

同様にすれば
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 は、1辺が $a+b$ の立方体を、次の図の様に8つの直方体に分けたときの体積の和と考えることができます。

0⁰をイメージ化する

学校の指数の学習で $a=0$ のとき、 $a^0=1$ と習います。では 0^0 はいくらになるのでしょうか？

$0^2=0$ $0^1=1$
 $0^3=0$ $1^0=1$
 $0^0=?$ $0^0=?$

0^0 は、0になるとも1になるとも考えられます。これをグラフを使って考えてみましょう。

① $y = a^x$ で考える

まず、 a^x のグラフを考えて、 a の値を $a=10, 0.8, \dots, 1, 0.8, 0.8, \dots$ と、どんどん小さくしてみました。0乗の値は、グラフの $x=0$ のときの y の値になります。

上の右図において、グラフはどんどん y 軸に近づいていきます。 y 軸における $x=0$ の値は特定できないこととなります。
 2次元図形を3次元化する、次の図のようになります。

波面にみる2次曲線

池に小石を投げ入れると、波紋が広がっていきます。このときの同心円状の波紋が波面です。波面は、波が進む方向と 90° の角度をなします。

水面の異なる2点から同時に石を投げ入れる場合を考えましょう。2つの波源から同位相(片方が山ならもう一方も山)で同じ振動数、振幅の波が送り出される場合の様子を、次の図は表わしています。

2つの波は、「波の重ね合わせの原理」によって足し合わされ、強め合ったり弱め合ったりして「干渉」します。2つの波源をそれぞれ F_1, F_2 、任意の点を P 、波長を λ 、 m を整数として、
 $F_1P - F_2P = m\lambda$ (強め合う条件)
 の点では常に強め合い、振幅が大きくなります。
 これに対し、
 $F_1P - F_2P = (m + 1/2)\lambda$ (打ち消し合う条件)
 の点では、常に打ち消し合い、振幅が0になります。これを干渉条件といいます。

約数の個数

正の整数 x の約数の個数は、 $x = a^p b^q c^r \dots$ と素因数分解されるとき $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ で求まります。これは、次の表からわかります。

$6 = 2 \times 3$	$12 = 2^2 \times 3$	$36 = 2^2 \times 3^2$																											
<table border="1"> <tr><td>2^0</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2^1</td><td>2</td><td>6</td></tr> </table>	2^0	1	3	2^1	2	6	<table border="1"> <tr><td>2^0</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2^1</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>2^2</td><td>4</td><td>12</td></tr> </table>	2^0	1	3	2^1	2	6	2^2	4	12	<table border="1"> <tr><td>2^0</td><td>1</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>2^1</td><td>2</td><td>6</td><td>18</td></tr> <tr><td>2^2</td><td>4</td><td>12</td><td>36</td></tr> </table>	2^0	1	3	9	2^1	2	6	18	2^2	4	12	36
2^0	1	3																											
2^1	2	6																											
2^0	1	3																											
2^1	2	6																											
2^2	4	12																											
2^0	1	3	9																										
2^1	2	6	18																										
2^2	4	12	36																										

式(※)において1を加えるのは素因数の0乗の場合があるからです。上の例では素因数が2つの場合ですが、同じようにして素因数が3つの場合を考えてみましょう。先ほどと同じような表では表わすことができません。そこで先ほどの表を次のような原子の分子モデルのように変えて表わしてみます。

それでは60を例にとって図示してみましょう。
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

合成の公式の視覚化

三角関数の授業の中で $\sin\theta + \cos\theta$ の和として $a \sin\theta + b \cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ (ただし $\tan\alpha = \frac{b}{a}$) という公式を習います。これは $y = a \sin\theta$ と $y = b \cos\theta$ のグラフを加えたものとなります。

この合成の公式を視覚的に理解してみましょう。まず $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4)$ ① について考えてみます。いま、単位円周上の動点をとり、原点 O と点 P を1辺として右図の様に正方形を作り直します。このとき、 OR は1辺が1の正方形の対角線ですから、
 $OR = \sqrt{2}$
 また、 OR の傾角は $\angle XOR = \angle XOP + \angle POR = \theta + \pi/4$ となりますから、点 P を動かしたときの点 R の軌跡が①のグラフとなります。

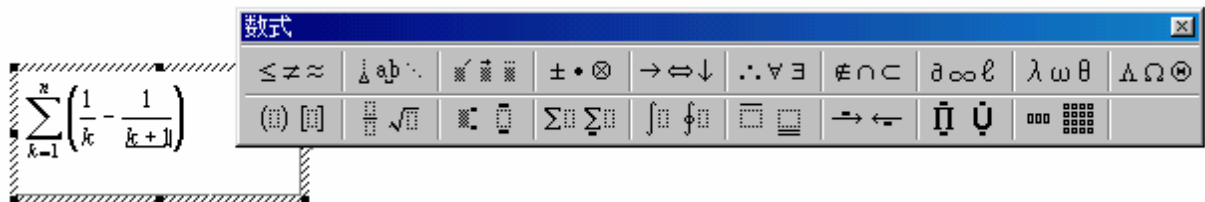
2次3項式の展開

$n=0$	1
$n=1$	$a+b+c$
$n=2$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$n=3$	$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$

これは正四面体として積み上げたときの、立体的なパスカルの三角形と考えることができます。側面は普通のパスカルの三角形となっています。

6_2 数学のプリント作成

日常的な授業用のプリントを作成するためのワープロとしての活用で問題になるのは、数式記号をどうするか、という点です。代表的なワープロである「Word」や「一太郎」には数式用のエディタがついていますので、それを用いると作成することができます。しかし、手間がかかるのが難点です。また、「Mathcad」のような数式文書を作成するのに適したソフトを用いたり、「Mathematica」「Maple」「Calcing」などをワープロとして用いることもできます。



数学用のプリントを作る際に、図を入れたいということがよくあります。先ほど紹介したフリーソフトの「Grapse」や「FunctionView」などでは、作成した図やグラフをコピーして、別なワープロのソフトに貼り付けることができます。

手軽で機能も豊富なので、とても便利です。

もっと凝った図を作りたいというときには、専用のソフトを使うことが必要です。主として次の2つの系統のソフトがあります。

- ・ DRAW 系ソフト

正確な描画やレイアウトを作図するのが DRAW ソフトです。きちりとした円や多角形、平行線、ベジェ曲線などを作成することができます。

- ・ PAINT 系ソフト

イラストや終え描き用のソフトが PAINT ソフトですが、プリント作成の場合には画面をキャプチャする機能が使い勝手が良いといえます。画面キャプチャ機能を用いると、各種ソフトで作成した画像の好きな部分を取り込むことができます。

更に一歩進んだ数式文書作成としてお勧めなのが TeX です。フリーのソフトですから、お金もかかりません。ワープロなのですが、テキスト形式で打ち込み、コンパイルする必要があります。

仕上がりがきれいですし、マクロを用いることで、数式に関する様々な文書を作成することができます。

```

\documentclass[a4j,10pt]{jarticle}
\begin{document}
\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2-1}
\end{document}

```

コンパイル

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2-1}$$

7 教材研究としてのコンピュータ

日常の教材研究の中でもコンピュータは大きな威力を発揮します。頭の中だけではイメージできない世界をコンピュータを用いることによって解析することができる場合があります。

7.1 2円の交点を通る直線の問題

『2つの円

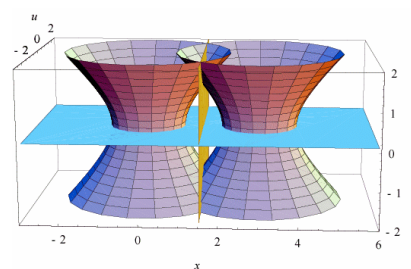
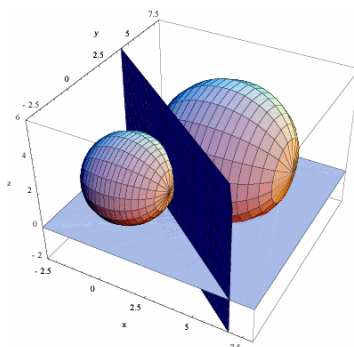
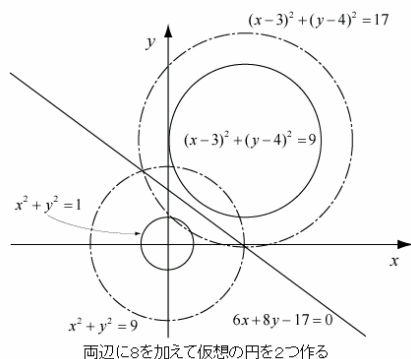
$$x^2 + y^2 = 1 \dots, x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0 \dots$$

の交点を通る直線は何か

という問題を、より $6x + 8y - 17 = 0$ としてしまうのは、テクニック偏重の受験数学の最たるものである。』

このテーマをもとに、ベキの比としての点の軌跡や球束と xy 平面との交わりが作る曲線などの分析がなされました。更に世界を複素数にまで広げ、虚円の交点の影としての直線の存在を示しました。こうした教材研究にもコンピュータは本当に大きな威力を発揮します。到底人の力だけではなし得ない世界をコンピュータは作り出してくれるのです。

また、派生的に「受験数学」とは何だろうか、といった論議もメーリングリスト上でおこりました。参加者も高校生から社会人までに至り、テーマによっては分析・議論自体が一つの教材となりうることを示したのです。こうした手法を可能にしたのはメーリングリストを含めた媒体としてのメールや Web コンテンツといったメディアの存在があげられます。

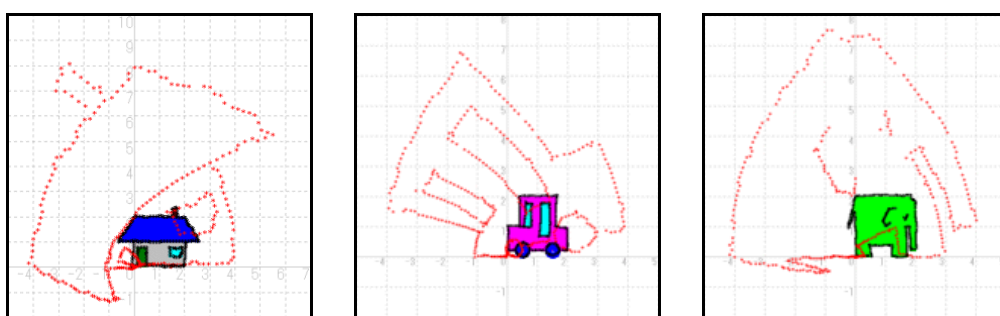


左の図は と の右辺に同じ数を加えて、2円の半径を同時に大きくして交わる交点を通る直線を表したものです。中央の図は空間内の2球面と xy 平面との交線と考えたものです。球面という身近な空間素材から、円弧が直線になって xy 平面上に落ちていく様子がイメージできます。右の図は世界を実平面から虚平面へと広げるにより「虚円」の世界を作成したものです。 y を虚数と考え3次元の虚空間を作成すると、2つの円は2つの双曲面へと変化します。この双曲面の交線の影が、 x 軸上に2円の差としてあらわれるのです。

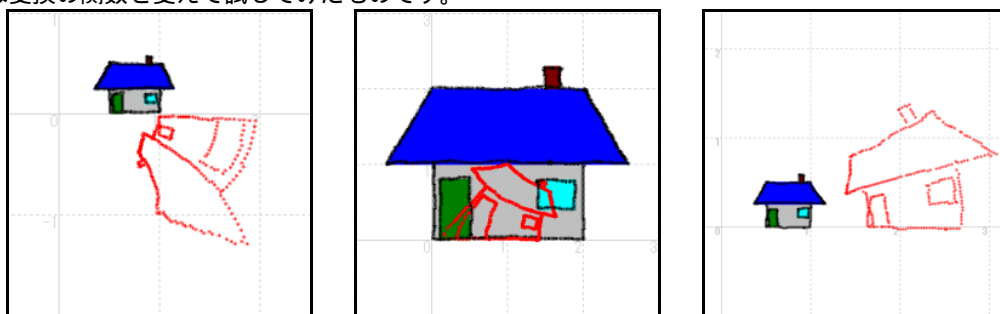
7.2 作用素としての複素数

次に複素数による図形変換を“作用素”としての観点からアプローチを試みた教材例を紹介します。現行課程では科目「数学B」の「複素数と複素数平面」で扱われる内容です。複素平面上における図形問題の解法には、様々な面白い要素を含んでいますが、機械的な計算によってその魅力を失わせている解法も目立ちます。

次の図は変換 $w=z^2$ で家、車、象それぞれを変換して得られた図です。最も大きな特徴はマウスペンで“なぞる”ことで、変換後の図形がリアルタイムに姿を現すため、シミュレーションとしての価値が大きいことです。



次の図は変換の関数を変えて試してみたものです。



$$w = \frac{1}{z} \text{ の変換}$$

$$w = \sqrt{z} \text{ の変換}$$

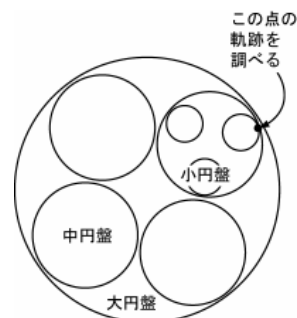
$$w = e^z \text{ の変換}$$

こうした複素変換を描画するのに十進 BASIC は最適です。それは独自の拡張機能として複素数モードを持っているからです。プログラムの序文に OPTION ARITHMETIC COMPLEX と宣言すると、複素数モードに設定されます。そして、 $z = \text{complex}(x,y)$ で $z = x + iy$ という複素数が得られ、関数を定義するだけで変換後の複素数が得られるのです。その後 $\text{Re}(w)$ 、 $\text{Im}(w)$ として、実部と虚部の部分を取り出し描画します。

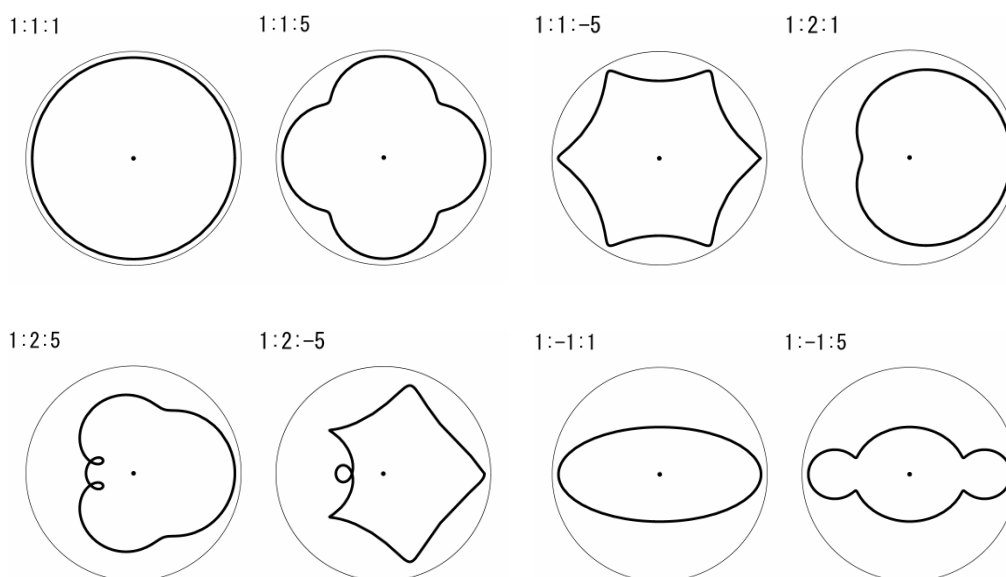
7.3 コーヒーカップの描く軌跡

遊園地にあるコーヒーカップ。遊園地の遊具の中では、昔からの定番メニューのひとつといえます。あのコーヒーカップを子供の遊具だと思って侮っていると、とんでもないことになるのはよく知られているところです。あのコーヒーカップに乗っている人はいったいどんな動きをするのかをコンピュータを用いてシミュレートしてみましょう。

コ回転する大きなステージの上に円盤が回っていて、その上に自分でまわすコーヒーカップの回転が加わり複雑な動きをします。大きなステージを大円盤、その上の円盤を中円盤、コーヒーカップを小円盤とすると、3つの円盤が回転していると考えることが



できます。大・中・小の3つの円盤の動く速度をいろいろと変えて、それが時間の変化とともにどのような動きをするか、その軌跡が問題です。次の図は3つの円盤の速度の比によって描かれる軌跡をシミュレートしたものです。



シミュレートプログラムは VisualBasic を用いて作成しましたが、以前と違い自らプログラムして教材を作成する時代ではなくなりました。以前は1つの題材を作成するのに膨大な時間を費やし、非能率的な仕事をしてきた様な気がします。今は良質なソフトを用いて多くの題材が短い時間で作成可能です。ただプログラミングの経験は色々なところで役に立つので、少しはかじっておくと良いと思います。

8 ネットワークとしてのコンピュータ

8_1 数学の一斉指導には不向きなネット

インターネットは“個人”での学習にとっては非常に大きな威力を発揮しますが、“一斉学習”という枠の中ではその特徴を生かしづらいのではないかと考えられます。その理由としては、

- ・ネットの持つ「地域性不依存」「時間的不依存」「人的不依存」という特性に適応しない。
- ・「数学」の一斉学習の中では「調べ学習」的な要素は適応しづらい
- ・ネットワーク上での数学教材に関するデータベースが整備されていない。
- ・シミュレーション型で「発見学習」的に用いることができる Java や VRML に関する教材が少ない。
- ・生徒が全員で活用するためには、機材の整備や速さ・費用等を含めた環境面で問題がある。

など、様々な点が考えられます。

始めにインターネットありきでは本質が見えてこないといえます。あくまでも“主役”は数学であって、コンピュータやインターネットは道具でしかありえないのですから。

8_2 ではネットと数学との関わりは？

それでは、数学教育へのインターネットの活用法にはどんなものがあるのでしょうか。考えられる点を挙げてみます。

- ・数学教育の素材（教材・指導案・実践記録など）の蓄積
- ・インターネット上に散らばる、数学に利用できる多様な素材の発見
- ・インターネット上の数学教育の素材を利用した教育実践
- ・VRML や Java など、新しいインターネットの技術を使った教材の試作
- ・数学教育におけるインターネットの可能性を探る議論

数学に関する様々なトピックスや実践記録などを蓄積，取得，実践し，そしてそれを検証することが重要でしょう。そうした“素材”にまず目をむけることが大事であり，数学教育にどのようにこれから生かしていくべきかを探ることから始める必要があります。

8_3 指導者側における活用

教員の側にたった場合の活用について考えてみましょう。ネット上では様々な教材や実践記録などを享受できると共に，互いの実践を比較したり検証したりすることが可能です。ネット上における様々な題材による教材研究，メールを通じた情報交換など教師にとっての活用度はかなり高いといえます。アンケート結果などでは，インターネットを導入してみたの一番のメリットは「先生たちの情報収集への貢献」をあげているところが多いようです。「ネット上で得た情報は人を作る」。インターネットの活用の第一歩は，教師自身の研修から始まると考えられます。

更にネットを通じた教育を考える場合に特に重要視したいのは，あるテーマを基に研究が深まっていったり，ある実践記録を他校でも工夫して実践しそれが報告されるなど，これまでの限られた地域だけのものからより広域で多くの人達が参加できる点です。つまり「数学的なコミュニケーション」を重視すると同時に，「教師のネットワーク」の中での議論を基に新しい授業を工夫する，といったことも可能なのです。

8_4 学習者側に立った活用

次に学習者の側に立った観点で考えてみましょう。学習者にとっても，WWW を通じた情報収集，ネット上でのデータベースの利用によって，自分にとって興味・関心のある内容を深めたり，自己学習力，問題解決能力，情報活用能力の育成が図られることなど可能性は非常に大きいといえます。生徒が自分の問題・関心のある場面を広げながら学習し，自分のペースで進めていく，またはフィードバックする。そうしたことをネットは可能にしてくれるのです。

昨今，情報化や社会の変化に伴い数学の必要性が増してきているにも関わらず，生徒たちの数学離れが確実に進んできています。その原因の一つとして，これだけ世の中のマルチメディア化が進んでいるにも関わらず，学校の一斉授業の中ではそうした現実に対応しきれない側面があるといえます。生徒の実態に迎合しなければいけない，などということは決してありません。しかし，生徒の持つ興味・関心が多様化している現在，何らかの方法でそれらに対応していく必要もあるのではないのでしょうか。一斉授業の中での学習はもちろん大事です。しかし，その中では補いきれない「数学に対する興味・関心」の芽を大事に育ててあげることは否定されるべきではないといえます。生徒一人一人の興味や関心には，当然個人差があります。一人の教師が繰り広げる「教室での世界」では学べない世界がそこにはあるのではないのでしょうか。そのとき「探求学習支援者」としての役割が，教師には生じるのです。

8_5 ネットワーク型の教材データベース「数学のいずみ」

北数教高部会では'97年からネットワーク型の教材データベース「数学のいずみ」を公開しています。数学にまつわる話題を集めた「数学トピックス」，普段の授業実践の報告例を収めた「実践記録・レポート」，テーマを絞って研究を深めていく「テーマ別共同研究」などがあります。また，地域の高校生の数学の資質向上のために長年実施してきている「北海道高等学校数学コンテスト」の問題や長年蓄積された中でシリーズ化された「数学の小手技」「メイくる数学」「数学玉手箱」などもありました。

年代を問わず多くの意見も寄せられ，小さな試みが長年の蓄積と同時に数学教育に少なからず役割を担うことができるまでになってきました。校内LAN整備が進む中で，より授業に使える教材作りの蓄積が求められています。これまで蓄積されたデータを，更により現場に即した形での還元の仕事が必要となるでしょう。



9 これからのコンピュータと数学

9_1 もはや特別でないコンピュータ ~あくまでも教材が中心

これまで見てきたようにコンピュータを様々な形で数学教育に用いることができます。しかし、どんな形で用いたとしても大事なものは教材の中身です。魅力ある授業を作るには、魅力ある題材が必要になります。ソフトウェアの機能を理解して使いこなす前に、どういった場面で、どんな内容で用いたいのか。そうした教材研究こそが必要であると思われます。

コンピュータばかりに頼るのも大きな問題があります。最近の生徒はコンピュータに慣れている世代ですから、内容が伴っていないかったり、ただただと問延びた授業ではそっぽを向いてしまいます。場面によっては、様々な教具を用いて説明したり、実習形式の授業を取り入れた方が、逆に生徒にとっては新鮮で、かつ、インパクトが強いといえます。

9_2 新課程におけるコンピュータの扱いと新教科「情報」の登場

平成 15 年度からの新課程においては「数学 B」のおいてのみ、コンピュータが扱われることになりました。内容としては「統計とコンピュータ」における資料の整理及び分析への活用と、「数値計算とコンピュータ」における簡単なアルゴリズム理解の 2 箇所です。つまり、これまで数学 A, B, C それぞれあったコンピュータに関する部分は、数学 B の一部を除いて消えることになったわけです。

反面、新課程では新教科「情報」が必修科目として設置されることとなりました。普通科目「情報」は、様々な情報を活用するための知識と技術の習得を通して、情報に関する科学的な見方・考え方の習得すると共に、情報社会に主体的に参加する能力・態度の育成を目標としています。

こうした新教科登場の背景には、学校現場において“コンピュータを用いた教育”というものがなかなか浸透しない現実と、急速に進む情報化社会との大きなギャップが生じていたことが原因と考えられます。

ここで問題となるのは新教科「情報」の登場で、コンピュータを用いた数学教育の後退が危惧されることです。北海道においては平成 12 年度から 14 年度の 3 ヶ年で 450 名の情報の免許を持つ教員が誕生しますが、そのうちの 4 分の 1 から 5 分の 1 が教科「数学」の教員だと予想されます。現状においてコンピュータに興味・関心を持つ教員の多くが「情報」に流れるとなると、数学の授業の中でコンピュータを用いた授業がかなり減ってしまうことが予想されます。つまりコンピュータは「情報」に任せればよい、そんな雰囲気さえ生まれる可能性さえあるのです。

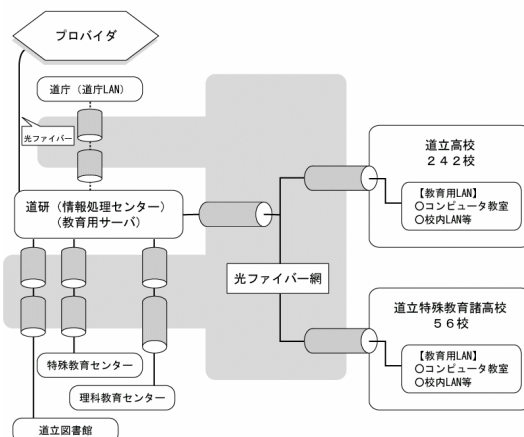
教科「情報」において習得した知識・技術や基本的な態度を他の教科へも効果的に活用していくことが当然理想です。しかし、次期新課程では実質的にコンピュータを扱う部分が削除され、現場の数学の少なからぬ教員が「情報」の免許を取得している状況を考えると、少ないながらも培ってきたコンピュータを用いた教育が後退するのではないかと大きな危機感を抱かざるを得ないのです。

9_3 進む校内 LAN 整備とブロードバンド化

そうした状況のもと期待されるのは「教育の情報化」プロジェクトによる校内 LAN 整備です。全ての教室にコンピュータとプロジェクトを設置し、インターネット接続を可能にするこのプロジェクトは、既に平成 12 年度から開始され 3 ヶ年で整備されることになっています。コンピュータやインターネットを『道具』として活用できる環境を作ることにより、「分かる授業」を目指そうとしています。

また道では平成 14 年度に道立学校 298 校全てと道立 4 教育機関を光ファイバーで接続するブロードバンド対応の環境整備事業に着手します。このブロードバンド化により、コンピュータ教

教育情報通信ネットワーク整備事業の概要



室や校内 LAN における全パソコンから同時に高速なインターネット接続が可能となります。

こうした校内 LAN 整備やブロードバンド対応による環境整備が進むことで、学習形態にも当然大きな変化が生じることが期待されます。画像系の教育コンテンツをスムーズに取り出し、従前の形態では限界がある内容を視覚的に説明することで、より効率の良い授業の展開が可能になります。つまりインターネットを教材庫として、Web 上から様々な教材を取り出し、提示することが可能になるのです。プレゼンでの授業が日常的になり、黒板とチョークだけであった授業の形態が遠い昔のこととなるかもしれません。

しかし、現実に目に見える変革があるかどうかは、生徒の理解力を上げたり、興味・関心を引き出すために、どれだけ“面白い”または“効率がよい”授業を行うことができるかが問題だといえます。そのためには何が必要なのか。ハード的な環境整備が達成された場合、必要なのはそれを活用するだけのコンテンツがあるのかどうか問題になってきます。

9_4 良質なフリーソフトの出現とそれを利用したコンピュータ利用の場面

手軽に教室でパソコンを用いたプレゼンテーションできる環境が整う中、数学用の機能性に富んだ良質なフリーソフトの役割も増加すると考えられます。

これまでも、コンピュータを道具として“ワンポイント”で活用する実践例は少しずつ増えてきていました。それを可能にしたのは、良質なフリーソフトの出現とネット上からの配信です。ネット上からいつでも最新のものを簡単に手に入れることができ、またフリーとは思えないような優れたインターフェースを備えているため、誰でも簡単に操作することができるのです。こうしたフリーソフトは、指導の効果を高め、より Visual で分かり易い授業を実現させました。グラフ作成や平面幾何、3次元空間、アルゴリズムなど、ソフト毎の利点を生かして、その場面場面に適した使い方が容易にできます。校内 LAN 環境の整備に伴い、こうしたフリーソフトを用いた実践例の蓄積も今まで以上に重要になっていくでしょう。コンピュータは道具から環境へと変化していくのです。

ソフト名	著作権	URL	用途	再配布の条件
Function View	和田 啓助（群馬県桐生工業高等学校）	http://hp.vector.co.jp/authors/VA017172/index.htm	関数グラフ表示	再配布自由
Grapes	友田 勝久（大阪教育大学附属高等学校池田校舎）	http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html	関数グラフ表示	再配布自由 (条件付き)
Geometric Constructor/	飯島 康之（愛知教育大学数学教室）	http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/ijjima/gc/test-gcw-in/download.htm	図形作図ツール	研究目的以外配布禁止
十進 BASIC	白石 和夫（文教大学）	http://www.vector.co.jp/authors/VA008683/	プログラミング	事前に連絡
ロゴ坊	兼宗 進	http://www.logob.com/logo/	プログラミング	記述なし

= ネット上からダウンロードできる代表的な数学用フリーソフトウェア =

9_5 不足するコンテンツ ～求められる教材のデータベース化

こうした「教育の情報化」のための校内 LAN 整備やブロードバンド化には、機器の設置やインターネット整備などの環境整備がきちんと進むのか、またシステム管理をどうするか、など残されている課題も多いといえます。しかし、それ以上に大きな問題点は教育用コンテンツをどうするのか、という点です。

既に Web 上では様々な情報が公開されています。しかし、欧米に比べるとその絶対量は圧倒的に少ないといえます。特に生徒用向けの教材や教師向けの授業に使える教材、実践事例など、コンテンツ不足は明らかです。

検索サイト（infoseek）の日本語サイトで「高校数学」で検索しとところ、3,000 件弱のサイトが検索されたのに対し

て、英語サイトで「school mathematics」で検索すると750万件をこえるサイトが検索されました(2001.1)。どれだけ有用なサイトであるか、という質の問題もあるであろうが、圧倒的なコンテンツ不足は明らかです。これは技術や量の問題ではなく、一種の文化の問題であり、慣習の問題だとも考えられます。

大阪教育大学の教育情報リンクリスト「インターネットと教育」の調査結果('99)では、インターネット上で不足している教育・学習情報を質問した結果、圧倒的に多いのが「教育実践事例報告」(38.5%)です。この傾向はここ数年変わっていません。そして「学習指導案・授業案」が29%でこれに続いています。現場の教師のニーズが教育実践事例報告や学習指導案・授業案など、実際の現場に直結するような情報にあるわけですが、まだそれが十分に供給されていないのが現状だといえます。現場に即したコンテンツをいかにして構築していくか、そうした「構築手法」自体の開発・普及の研究が必要でしょう。

9_6 人的なネットワークの必要性 ~ともに数学教育について考えてみませんか

「数学教育実践研究会」は平成6年1月に、札幌市内の高校の数学教師を中心として設立されました。その背景としては、情報化や社会の変化に伴い数学の必要性が増してきている反面、子供たちの数学離れが確実に進み、決して楽観視できない状況になってきたことや、新指導要領のカリキュラム改変に伴う多様化する数学履修内容の現場サイドへの対応の苦悩があげられます。

学習指導要領では、「情報化社会における数学教育の多岐にわたる必要性」が強調され、従前の「体系的に組み立てていく数学の考え方」のみならず、併せて「それらを積極的に活用する態度を育てる」という主体的かつ意欲的に取り組もうとする態度の育成が重点に置かれています。本研究会はそれを踏まえつつ、「高校数学で扱う教材およびそれらの関連性を分析し、生徒達に効率よくその教材のもつ本質的意味を理解させる」ことを目的とし、あくまで「教材の研究分析」に力点をのこした活動を展開しています。

ホムページ「数学のいずみ」には様々な意見がメールで送られてきます。内容もとても熱心なものが多いといえます。これまでは地域的な問題や時間的な制約などもあり、研修をしたくてもなかなかできない人も多かったのではないのでしょうか。そうした制約をネットは解消してくれます。数学には無限の楽しさがあるのです。そんな面白さを生徒にも伝えたい。そのために自らも数学の題材を研究していく。是非、数実研に参加して共に活動しませんか。また、会に参加しなくてもメーリングリスト「izumi」を運営していますので、是非そちらに参加されることを期待します。

ネットワーク型教材データベース「数学のいずみ」

北海道算数・数学教育会 高等学校部会研究部
(数学教育実践研究会 + 代数解析研究部)

URL : <http://www.nikonet.or.jp/spring/>

E-mail : suujitu@nikonet.or.jp

M-List : http://www.nikonet.or.jp/spring/ml_izumi/ml_izumi.htm