数学の定石　漸化式

http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/

基本公式

(1) $a_{n+1}=a_n+d \quad \Rightarrow \quad a_n=a_1+(n-1)d$

(2) $a_{n+1}=ra_n \quad \Rightarrow \quad a_n=a_1 \bullet r^{n-1}$

(3) $a_{n+1}=a_n+f(n) \quad \Rightarrow \quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

1.　$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$

① $a_{n+1}=pa_n+q$

例題 1　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3$

$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

$b_{n+1}=2b_n \quad (b_1=a_1+3=4)$

$b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_n+3=2^{n+1}$

$a_n=2^{n+1}-3$

② $a_{n+1}=a_n+f(n)$

例題 2　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n$

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}k=2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+4}{2}$

③ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$

例題 3　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n$

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)$

$a_{n+1}=2a_n+n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_{n+1}=2b_n+1 \quad (b_1=a_2-a_1=2)$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$c_{n+1}=2c_n \quad (c_1=b_1+1=3)$

$c_n=3\cdot 2^{n-1}$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3\cdot 2^{k-1}-1)=1+\frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=3\cdot 2^{n-1}-n-1$

例題 4　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+2^n$

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2} \quad (b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2})$

$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$a_n=2^n\cdot\frac{n}{2}=n\cdot 2^{n-1}$

④ $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$

例題 5　$a_1=2,\ na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)} \quad (b_1=\frac{a_1}{1}=2)$

$b_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{3n-1}{n}$

$\frac{a_n}{n}=\frac{3n-1}{n}$

$a_n=3n-1$

⑤ $a_{n+1}=f(n)a_n$

例題 6　$a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n$

$a_n=na_{n-1}$

$=n(n-1)a_{n-2}$

$=n(n-1)(n-2)a_{n-3}$

・・・・・・

$=n(n-1)\cdots 4\cdot 3\cdot 2a_1$

$=n!$

⑥ $S_n-S_{n-1}=a_n$ を用いる問題

例題 7　$a_1=1,\ a_{n+1}=S_n+(n+1)$

$a_{n+1}=S_n+(n+1)$

$a_n=S_{n-1}+n$

$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1$

$a_{n+1}=2a_n+1$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$b_{n+1}=2b_n \quad (b_1=a_1+1=2)$

$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$a_n=2^n-1$

2.　$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ka_n+l}$

① $a_{n+1}=\frac{pa_n}{ka_n+l}$

例題 8　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$

$b_{n+1}=2+3b_n \quad (b_1=\frac{1}{a_1}=1)$

$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$c_{n+1}=3c_n \quad (c_1=b_1+1=2)$

$c_n=2\cdot 3^{n-1}$

$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

$a_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

② $a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ka_n+l}$

例題 9　$a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2}$

$a_{n+1}-2=\frac{3a_n+2}{a_n+2}-2=\frac{a_n-2}{a_n+2} \quad \cdots(1)$

$a_{n+1}+1=\frac{3a_n+2}{a_n+2}+1=4\bullet\frac{a_n+1}{a_n+2} \quad \cdots(2)$

(1)(2)より

$\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1}$

$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n \quad (b_1=\frac{a_1-2}{a_1+1}=-2)$

$b_n=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{a_n-2}{a_n+1}=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_n=\frac{-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+2}{1+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=\frac{-2+2\cdot 4^{n-1}}{4^{n-1}+2}=\frac{2(4^{n-1}-1)}{4^{n-1}+2}$

③その他

例題 10　$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$

$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n} \quad \cdots(1)$

$a_{n+1}+1=\frac{(a_n+1)^2}{2a_n} \quad \cdots(2)$

(1)(2)より

$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\left(\frac{a_n-1}{a_n+1}\right)^2$

$b_{n+1}={b_n}^2 \quad (b_1=\frac{a_1-1}{a_1+1}=\frac{1}{3})$

$b_n={b_{n-1}}^2={b_{n-2}}^4=\cdots={b_1}^{2n-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}$

$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}$

$a_n=\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}}$

3.　$a_{n+1}=p{a_n}^q$

① $a_{n+1}=p{a_n}^q$

例題 11　$a_1=4,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n}$

$\log_2 a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\log_2 a_n$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n \quad (b_1=\log_2 a_1=2)$

$b_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{2-n}$

$\log_2 a_n=2^{2-n}$

$a_n=2^{2^{2-n}}$

② $a_{n+2}=pa_{n+1}{}^{q}a_n{}^{q}\quad (p+q=1)$

例題 12　$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\sqrt[3]{a_{n+1}}\sqrt[3]{a_n{}^2}$

$\log_2 a_{n+2}=\dfrac{1}{3}\log_2 a_{n+1}+\dfrac{2}{3}\log_2 a_n$

$b_{n+2}=\dfrac{1}{3}b_{n+1}+\dfrac{2}{3}b_n$

$(b_1=\log_2 a_1=0,\ b_2=\log_2 a_2=1)$

$b_{n+2}-b_{n+1}=\dfrac{1}{3}(b_{n+1}-b_n)$

$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n \quad (c_1=b_2-b_1=1)$

$c_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_{n+2}-b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_n=0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\log_2 a_n=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$a_n=2^{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

4.　$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$

① $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\quad (p+q+r=0)$

例題 13　$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

$b_{n+1}=3b_n \quad (b_1=a_2-a_1=1)$

$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$

$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

② $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\quad (p+q+r\neq 0)$

特性解が重解でない

例題 14　$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(1) $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$

$a_{n+1}-2a_n=3(a_n-2a_{n-1})$

$\cdots\cdots\cdots$

$=3^{n-1}(a_2-2a_1)$

$=3^{n-1}$

(2) $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$

$a_{n+1}-3a_n=2(a_n-3a_{n-1})$

$\cdots\cdots\cdots$

$=2^{n-1}(a_2-3a_1)$

$=2^{n-1}$

(1)(2)より　$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

③ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\quad (p+q+r\neq 0)$

特性解が重解

例題 15　$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$a_{n+1}-2a_n=2^{n-1}(a_2-2a_1)=2^{n-1}$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{4}$

$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{4}\quad (b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2})$

$b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(n+1)$

$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{4}(n+1)$

$a_n=\dfrac{2^n}{4}(n+1)=2^{n-2}(n+1)$

④ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=s\quad (p+q+r=0)$

例題 16　$a_1=1,\ a_2=2,\ 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=5$

$a_{n+2}-\dfrac{4}{3}a_{n+1}+\dfrac{1}{3}a_n=\dfrac{5}{3}$

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)+\dfrac{5}{3}$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{5}{3}\quad (b_1=a_2-a_1=1)$

$b_{n+1}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{3}(b_n-\dfrac{5}{2})$

$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n\quad (c_1=b_1-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2})$

$c_n=-\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_n=-\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{2}$

$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{2}\right\}$

$=1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{3}}+\dfrac{5}{2}(n-1)$

$=\dfrac{9}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{2}n-\dfrac{15}{4}$

⑤ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=f(n)\quad (p+q+r=0)$

例題 17　$a_1=1,\ a_2=3$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=2^{n+1}$

$(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)=2^{n+1}$

$b_{n+1}-2b_n=2^{n+1}\quad (b_1=a_2-a_1=2)$

$\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{b_n}{2^n}=1$

$c_{n+1}-c_n=1\quad (c_1=\dfrac{b_1}{2}=1)$

$c_n=n$

$b_n=n\cdot 2^n$

$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 2^k$

ここで $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 2^k$ とおくと

$S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$

$2S_n=\qquad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^n$

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^n$

$S_n=-\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+(n-1)\cdot 2^n=(n-2)\cdot 2^n+2$

$a_n=1+(n-2)\cdot 2^n+2=(n-2)\cdot 2^n+3$

5.　$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$

① $\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$

例題 18　$a_1=2,\ b_1=1$

$a_{n+1}=3a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n+3b_n$

(1) $a_{n+2}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$

$c_{n+1}=2c_n\quad (c_1=a_1-b_1=1)$

$c_n=2^{n-1}$

$a_n-b_n=2^{n-1}$

(2) $a_{n+2}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$

$c_{n+1}=4c_n\quad (c_1=a_1+b_1=3)$

$c_n=3\cdot 4^{n-1}$

$a_n+b_n=3\cdot 4^{n-1}$

(1)(2)より

$a_n=\dfrac{1}{2}(2^{n-1}+3\cdot 4^{n-1}),\quad b_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1})$