数学の定石　**接線と面積の公式**

http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/

1．2 次関数と接線①

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \left(S=\frac{|a_1-a_2|}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$$

【例題 1】

(1)　$y=2x^2-4x-4$，x 軸

(2)　$y=-x^2+3x+2$，　$y=x-1$

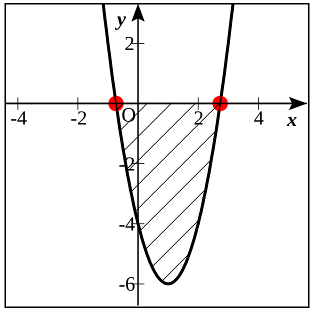
(3)　$y=x^2+1$，　$y=-x^2+x+2$

(1)　$x=1\pm\sqrt{3}$ より

$$S=\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}-(2x^2-4x-4)dx$$

$$=\frac{|-2|}{6}\left\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\right\}^3$$

$$=8\sqrt{3}$$

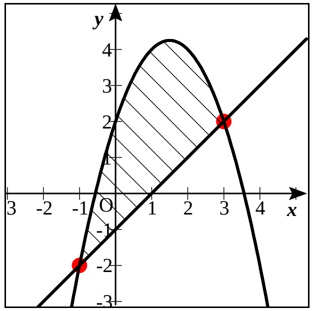


(2)　$-x^2+3x+2=x-1$　　$\therefore$　$x=-1,\,3$

$$S=\int_{-1}^{3}\left\{(-x^2+3x+2)-(x-1)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\frac{|-1|}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

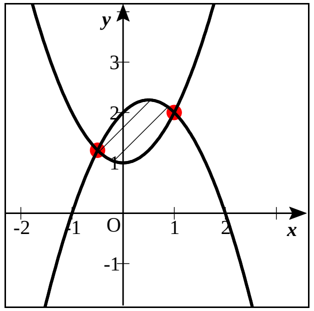


(3)　$x^2+1=-x^2+x+2$　　$\therefore$　$x=-\frac{1}{2},1$

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{(-x^2+x+2)-(x^2+1)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx$$

$$=\frac{|-2|}{6}\left\{1-(-\frac{1}{2})\right\}^3=\frac{9}{8}$$



※$|a|$ を忘れないように注意

2．2 次関数と接線②

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

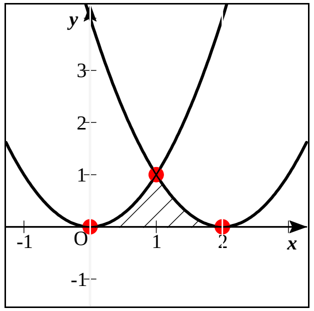
【例題 2】

(1)　$y=x^2$，　$y=(x-2)^2$，x 軸

(2)　$y=x^2+3x-2$，　$y=x^2-x+2$ と共通接線で囲まれる部分の面積

(1)

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx=\frac{1}{12}(2-0)^3=\frac{3}{2}$$

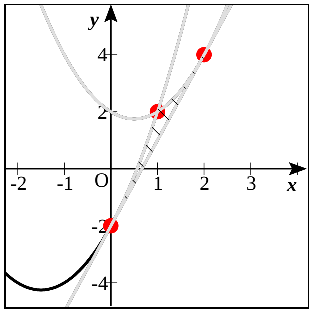


(2)　共通接線 $y=3x-2$ との交点の x 座標　$x=0,\,2$

$$S=\int_0^1\left\{(x^2+3x+2)-(3x-2)\right\}dx$$

$$+\int_1^2\left\{(x^2-x+2)-(3x-2)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{12}(2-0)^3=\frac{3}{2}$$



※交点の x 座標が接点の x 座標の中点に

3．2 次関数と接線③

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

【例題 3】

$y=10x^2-6x+1$ と点 A$(0,-9)$ から引いた 2 本の共通接線を考える。

(1)　放物線と 2 本の接線とで囲まれる部分の面積 S_1

(2)　放物線と接点を結ぶ直線とで囲まれる部分の面積 S_2

(1) 2 つの接線　$y=14x-9$，$y=-26x-9$

$$S_1=\int_{-1}^{0}\left\{(10x^2-6x+1)-(-26x-9)\right\}dx$$

$$+\int_0^1\left\{(10x^2-6x+1)-(14x-9)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(10x^2+20x+10)dx$$

$$+\int_0^1(10x^2-20x+10)dx$$

$$=\frac{10}{12}\{1-(-1)\}^3=\frac{20}{3}$$

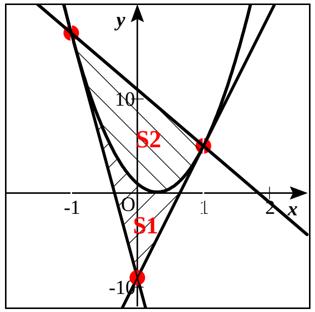
(2)　接点 $(-1,17)$，　$(1,5)$ を通る直線

$y=6x+11$

$$S_1=\int_{-1}^{1}\left\{(10x^2-6x+1)-(6x+11)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(10x^2-12x-10)dx$$

$$=\frac{10}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{40}{3}$$



※S_1：S_2＝1：2 であることに注意

4．3 次関数と接線

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

【例題 4】

$y=x^3-4x$ と点 A$(-1,3)$ における接線で囲まれる部分の面積

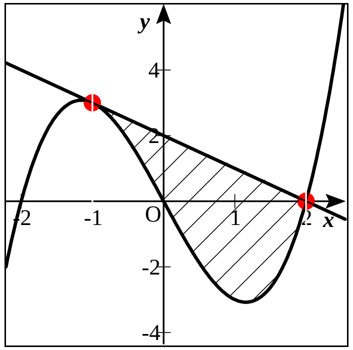
接線の方程式　$y=-x+2$

他の交点の x 座標は 2

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{(-x+2)-(x^2-4x)\right\}dx$$

$$+\int_{-1}^{2}(-x^2+3x+2)dx$$

$$=\frac{|-1|}{12}\left\{2-(-1)\right\}^4=\frac{27}{4}$$



【例題 5】

2 つの曲線 $y=x^3$ と $y=3x^2-4$ で囲まれる部分の面積

2 つの曲線の交点の x 座標

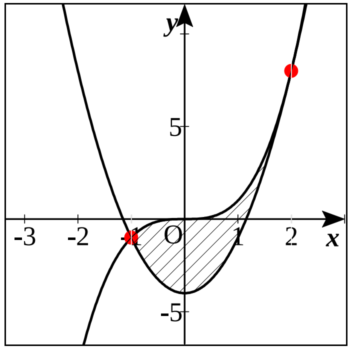
$$x^3=3x^2-4$$

$\therefore$　$x=-1,\ 2$　（$x=2$ は重解）

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{x^3-(3x^2-4)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left\{2-(-1)\right\}^4=\frac{27}{4}$$



5．n 次関数と接線

$$\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$
$$=a\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

【例題 5（別解）】

2 つの曲線 $y=x^3$ と $y=3x^2-4$ で囲まれる部分の面積

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{x^3-(3x^2-4)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2dx$$

$$=\frac{1!2!}{(1+2+1)!}\left\{2-(-1)\right\}^{1+2+1}=\frac{27}{4}$$