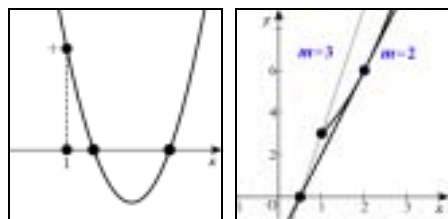


数学の定石 解の決定問題

http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/

- (1) 解の決定
D 軸 $x=p$ の位置 $f(k)$ の符号
- (2) 定点通過問題
放物線と定点を通る直線の共有点
- (3) 解と係数の関係

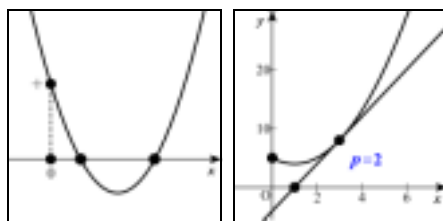
例題 1 $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ が 1 より大きな異なる 2 つの解を持つ



【解 1】
 $D/4 = m^2 - m - 2 > 0$ $m < -1, 2 < m$
 軸 $x = m > 1$ $m > 1$
 $f(1) = -m + 3 > 0$ $m < 3$
 ~ より $2 < m < 3$

【解 2】
 $x^2 + 2 = m(2x - 1)$ より $y = x^2 + 2$,
 $y = m(2x - 1)$ ($x > 1$) のグラフを考える
 接するとき
 $D/4 = m^2 - m - 2 = 0$ $m = -1, 2$
 点 (1, 3) を通るとき $m = 3$
 ~ とグラフより $2 < m < 3$

例題 2 $x^2 - 2(p+1)x + 2p+5 = 0$ の 2 つの解がともに正である

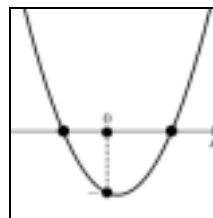


【解 1】
 $D/4 = p^2 - 4 \geq 0$ $p \leq -2, 2 \leq p$
 軸 $x = p+1 > 0$ $p > -1$
 $f(0) = 2p+5 > 0$ $p > -5/2$
 ~ より $p \geq 2$

【解 2】
 $x^2 - 2x + 5 = 2p(x-1)$ より $y = x^2 - 2x + 5$,
 $y = 2p(x-1)$ ($x > 0$) のグラフを考える
 接するとき
 $D/4 = p^2 - 4 = 0$ $p = \pm 2$
 グラフより $p \geq 2$

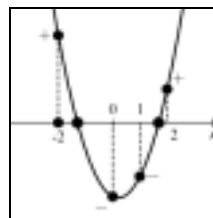
【解 3】
 $D/4 = p^2 - 4 \geq 0$ $p \leq -2, 2 \leq p$
 解と係数の関係より
 $\alpha + \beta = 2(p+1) > 0$, $\alpha\beta = 2p+5 > 0$
 $p > -1$, $p > -5/2$
 ~ より $p \geq 2$

例題 3 $x^2 + 8ax - 8a + 24 = 0$ が正の解と負の解を持つ



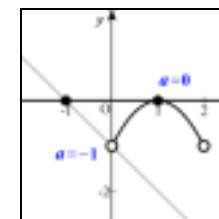
【解】 $f(0) = -8a + 24 < 0$ $a > 3$

例題 4 $2x^2 + (a-2)x + 3(a-5) = 0$ の 1 つの解が -2 と 0 の間にあり, 他の解が 1 と 2 の間にある



【解】 $f(x) = 2x^2 + (a-2)x + 3(a-5)$
 $f(-2) = a - 3 > 0$ $a > 3$
 $f(0) = 3(a-5) < 0$ $a < 5$
 $f(1) = 4a - 15 < 0$ $a < 15/4$
 $f(2) = 5a - 11 > 0$ $a > 11/5$
 $3 < a < 15/4$

例題 5 $x^2 - (2-a)x + 1 + a = 0$ の 2 つの解のうち, 少なくとも 1 つが 0 と 2 の間にある



【解】 $-x^2 + 2x - 1 = a(x+1)$ より
 $y = -x^2 + 2x - 1$ と $y = a(x+1)$ ($0 < x < 2$)
 のグラフを考える
 接するとき $a = 0$
 点 (0, -1) を通るとき $a = -1$
 ~ とグラフより $-1 < a \leq 0$