数学の定石　微分の公式

http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/

1. 微分係数，導関数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+a)-f(x)}{h}$$

2. 基本公式

$(C)'=0$

$(x^n)'=nx^{n-1}$　特に $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(a^x)'=a^x\log a$

$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

3. 基本公式

(1) 和・差，実数倍

$\{k f(x)\}'=k f'(x)$

$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) 積・商

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

特に $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=\dfrac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(3) 合成関数

$y=f(g(x))$ のとき $u=g(x)$ として

$$\frac{dy}{dx}=f((g(x))g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

特に　$\{f(cx)\}'=c f'(cx)$

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

(4) 逆関数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

4. 変数の変更

(1) 媒介変数表示

$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

(2) 陰関数（1 変数関数）

$y=f(x)$ が $y=F(x,y)$ で与えられているとき

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}y'=0$$

5. 高次導関数

$(x^\alpha)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$(\cos x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$(e^x)^{(n)}=e^x$

$(e^{kx})^{(n)}=k^n e^{kx}$

$(a^x)^{(n)}=a^x(\log a)^n$

$(a^{kx})^{(n)}=a^{kx}(k\log a)^n$

$(\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{x^n}$

$(\log_a x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{x^n\log a}$

6. 接線の公式

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ において

(1) 接線の方程式

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(2) 法線の方程式

$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

7. 平均値の定理

(1) ロールの定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なとき，$f(a)=0$，$f(b)=0$ ならば

$f'(c)=0\quad(a<c<b)$

となる c が少なくとも一つ存在する。

(2) 平均値の定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$

となる c が少なくとも一つ存在する。

(3) 平均値の定理（拡張）

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なとき

$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\quad(0<\theta<1)$

となる θ が少なくとも一つ存在する。

8. 関数の増減と極値

(1) 関数の増減

$f'(x)>0$ である区間で $f(x)$ は単調増加

$f'(x)<0$ である区間で $f(x)$ は単調減少

(2) 極値の必要条件

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとり微分可能であるとき，$f'(a)=0$

9. 第 2 次導関数の応用

(1) 第 2 次導関数の符号と極値

$f'(a)=0,\ f''(x)>0$ のとき $f(a)$ は極小

$f'(a)=0,\ f''(x)<0$ のとき $f(a)$ は極大

(2) 曲線の凹凸

$f''(x)>0$ である区間で $f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$ である区間で $f(x)$ は上に凸

10. 漸近線

(1) x 軸に垂直な漸近線

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ または $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ が $+\infty$ か $-\infty$

ならば直線 $x=a$ は漸近線

(2) x 軸に垂直でない漸近線

$\lim\limits_{x\to+\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ ならば

直線 $y=ax+b$ は漸近線

このとき

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{a}$,　$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}$