第 9 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

平成 3 年 1 月13日(日)

9 時00分～12時30分(210分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題1　ある売店では，毎日1回発行される新聞を売っている。この新聞を1部70円で仕入れ(買い取り)，1部90円で売っている。その日仕入れた新聞が全部売り切れたら店じまいし，逆に売れ残りがでたらその日のうちに廃棄してしまうものとする。1日に仕入れる新聞の部数は，1度決めると，その後100日間は変更できない。1日に何部仕入れるのがいちばんもうかるかを知りたい。資料として，過去100日間のその売店での需要部数を調査した下のような表がある。この表から，たとえば需要が90部の日は100日間のうち40日間であることが分かる。

需要部数	60部	70部	80部	90部	100部	計
日　　数	20日	20日	10日	40日	10日	100日

これから100日間も上の表と同じような需要があるものと仮定する。このとき，1日にn部仕入れたときの今後100日間の利益合計を$f(n)$円とする。ただし，売り切れによる損失や，売れ残りの新聞を廃棄する費用は0円と仮定する。

$f(n)=$(100日間の売上合計)$-$(100日間の仕入れ合計)

であり，$n=30$のときは，$f(30)=60000$,

$n=95$のときは，$f(95)=50500$となる。

このとき，次の各問に答えよ。

問1　$f(40)$はいくらか。

問2　$f(100)$はいくらか。

問3　nが$70\leqq n\leqq 80$をみたす自然数であるとき，$f(n)$を表す式を求めよ。

問4　$f(n)$を最大にする自然数nを求めよ。また，その理由を簡単に説明しなさい。

問題2　半径r，直径ABの円の中心をOとする。円周上の任意の1点Pにおける接線にA，Bから垂線をひき，その足をそれぞれM，Nとすれば

AM＋BNは一定である。

(以下作図はすべてfree handでよい。)

問1　点Pが点Aと一致する場合

AM＋BNはどのような値をとるか。図をかいて説明せよ。

問2　点Pが点A，Bと異なる場合について，題意に適する図をかけ。

問3　問2の場合について

AM＋BNが一定であることを証明せよ。

問題 3　中心(0, 0)，半径 r の円周を C_r とおく。ただし $r>0$。C_r 上の点 $(x,\ y)$ で，$x+y$，xy がともに整数となる点の個数を $P(r)$ とおく。次の問に答えよ。

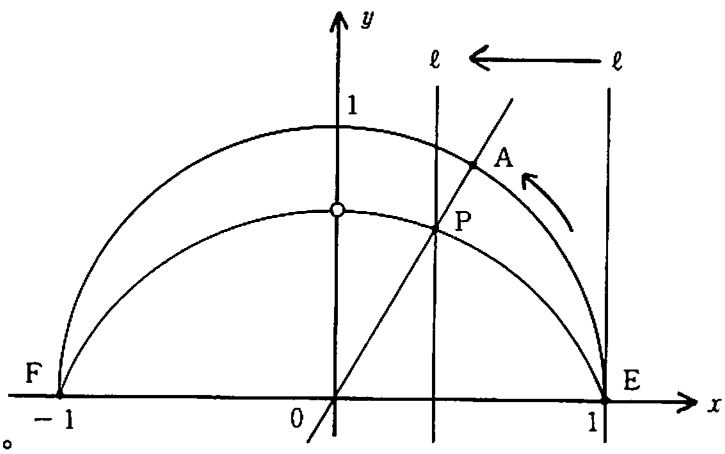
問 1　C_1 上の点 $(x,\ y)$ で $x+y$，xy がともに整数となる点をすべて求めよ。$P(1)$ はいくらか。

問 2　$C_{\sqrt{3}}$ 上の点 $(x,\ y)$ で $x+y$，xy がともに整数となる点を求めよ。$P(\sqrt{3})$ はいくらか。ただし，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。

問 3　$r=a\sqrt{2}$ のとき，$P(r)=20$ となるように a を定めよ。ただし，a は正の整数で，$\sqrt{2}=1.414\cdots$。

問題 4　下図のように，y 軸に平行な直線 l が，初め直線 $x=1$ と重なっており，2 秒後に直線 $x=-1$ に重なるまで等速度で移動するものとする。一方，動点 A は直線 l と同時に点 E(1, 0) を出発し，図のように原点 O を中心とする半径 1 の半円周上を一定の速さで移動し，2 秒後に点 F(−1, 0) に達するものとする。直線 l と直線 OA の交点を P とし，点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく。ただし，$x\neq 0$ とする。

点 P の軌跡は，"円積曲線" と呼ばれている。次の各問に答えよ。



問 1　直線 l および動点 A が同時に出発してから，t 秒後の点 P の x 座標を t の式で表せ。
ただし，$0\leqq t\leqq 2$ とする。

問 2　点 P の各座標 x と y の関係式を求めよ。ただし，角を使うときは度数法，弧度法のいずれを用いてもよい。以後同様とする。

問 3　この円積曲線上に 2 点 P，Q をとり，この 2 点からそれぞれ x 軸へ下ろした垂線と x 軸との交点を M，N とする。MN$=a$ のとき，$\angle$ POQ を a を用いて表せ。

問 4　解答欄において，$\angle$ POE が図のように与えられている。P は曲線上の点である。このとき，この曲線と定木とコンパスを用いて，$\angle$ POE を 3 等分する方法を解答欄の図に書き加え，解答欄の枠内に，作図方法を簡単に書け。問 3 が正解でない場合は不可とする。

問題5　xについての整式で与えられる関数$f(x)$に対して，関数$\Delta f(x)$（Δはデルタとよむ），$\Delta^2 f(x)$，$\Delta^3 f(x)$，……，を次のように定義する。

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$

$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$

$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)$

例，$f(x)=x^2$のとき，$\Delta f(3)=f(3+1)-f(3)=4^2-3^2=7$

次の問に答えよ。

問１　$f(x)=x^2$について，$\Delta f(1)$，$\Delta^2 f(1)$の値を求めよ。

問２　$f(x)=x^3$のとき次の表を完成させよ。

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-3	-27	19	-12	
-2	-8	7		
-1	-1			
0				
1				
2				
3				
4				
5				

問３　関数$f(x)$が２次関数であることと，$\Delta^2 f(x)$が０以外の定数になることは同値であることを示せ。

平成２年度(平成３年１月13日実施)

第９回
北海道高等学校数学コンテスト

解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

ある売店では，毎日1回発行される新聞を売っている。この新聞を1部70円で仕入れ（買い取り），1部90円で売っている。その日仕入れた新聞が全部売り切れたら店じまいし，逆に売れ残りがでたらその日のうちに廃棄してしまうものとする。1日に仕入れる新聞の部数は，1度決めると，その後100日間は変更できない。1日に何部仕入れるのがいちばんもうかるかを知りたい。資料として，過去100日間のその売店での需要部数を調査した下のような表がある。この表から，たとえば需要が90部の日は100日間のうち40日間であることが分かる。

需要部数	60部	70部	80部	90部	100部	計
日　数	20日	20日	10日	40日	10日	100日

これから100日間も上の表と同じような需要があるものと仮定する。このとき，1日に n 部仕入れたときの今後100日間の利益合計を $f(n)$ 円とする。ただし，売り切れによる損失や，売れ残りの新聞を廃棄する費用は0円と仮定する。

$f(n)$＝(100日間の売上合計)－(100日間の仕入れ合計)

であり，$n=30$ のときは，$f(30)=60000$，
$n=95$ のときは，$f(95)=50500$ となる。

このとき，次の各問に答えよ。

問1　$f(40)$ はいくらか。

問2　$f(100)$ はいくらか。

問3　n が $70\leqq n\leqq 80$ をみたす自然数であるとき，$f(n)$ を表す式を求めよ。

問4　$f(n)$ を最大にする自然数 n を求めよ。また，その理由を簡単に説明しなさい。

着眼点

この問題は「新聞売り子の問題」として有名な，OR（オペレーションズ・リサーチ）といわれている分野に属する問題をもとにしています。問題の仮定にそってていねいに式におきかえていくと解くことができますが，条件にあたるデータが複雑なので，どのように解析するかがポイントになるでしょう。

問1は仕入れた新聞がすべて売り切れる場合，問2は新聞は不足することがない場合です。問3は，日によって売り切れたり，売れ残りがでたりする場合です。問3の条件以外でも，関数 $f(n)$ は1次関数となり，$f(n)$ のグラフが折れ線になること，各折れ線の傾きに着目すればよいことに気付けば，問4も比較的スムーズにできます。

解答例

問1　仕入れた新聞40部はすべて売り切れる。新聞1部につき20円の利益があるから

(1日の利益)＝20×40

$f(40)$＝(1日の利益)×100＝20×40×100
＝<u>80000</u>(8万)

問2　$f(100)$＝(100日間の売上合計)－(100日間の仕入れ合計)
＝90×(60×20＋70×20＋80×10＋90×40＋100×10)－(70×100×100)
＝90×8000－70×10000
＝<u>2000</u>

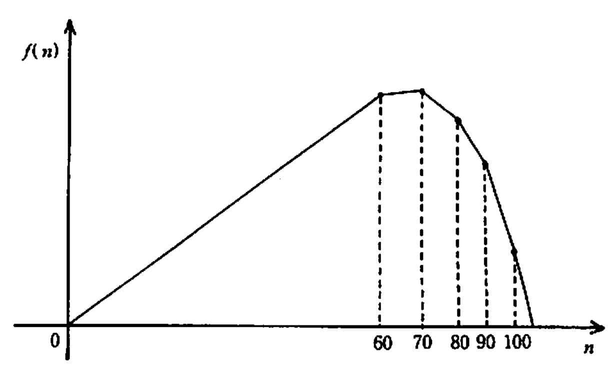
問3　$f(n)=90\times(60\times20+70\times20+n\times10+n\times40+n\times10)-(70\times n\times100)$
$=90\times2500+90\times n\times60-70\times n\times100$
$=\underline{225000-1600n}$

問4　問3と同様にして，$60\leqq n\leqq 70$ 等の区間の場合，$f(n)$ は n の1次関数である。また，となりあう2つの区間の境界の n については，どちらの $f(n)$ の式で計算しても値が同じになる（たとえば $f(70)$ は，$60\leqq n\leqq 70$ の式で計算しても，$70\leqq n\leqq 80$ の式で計算しても，同じ値になる）。よって $f(n)$ のグラフは折れ線になる。各区間での傾きに注目すると，

- $n\leqq 60$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝　2000
- $60\leqq n\leqq 70$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝　200
- $70\leqq n\leqq 80$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－1600
- $80\leqq n\leqq 90$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－2500
- $90\leqq n\leqq 100$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－6100
- $100\leqq n$ 　のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－7000

上記より，$f(n)$ のグラフの概形は図のようになり，$f(n)$ を最大にする n の値は70であることがわかる。

<u>答　$n=70$</u>



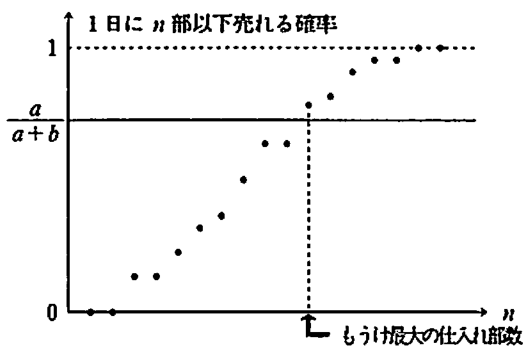
この問題を一般にした問題はすでに研究されていて，次のような定理が得られています。

定理　「ある新聞売り子が新聞を仕入れ，1部売れば a 円の利益をあげるが，売れ残りについては1部につき b 円払えば引き取ってくれるものとする。このときもうけ最大の仕入れ部数 n は，

$$(1\text{日に}n-1\text{部以下売れる確率})<\frac{a}{a+b}$$

$$\leqq(1\text{日に}n\text{部以下売れる確率})$$

をみたす n である。



この問題1にこの定理を適用してみましょう。$a=20$，$b=70$と解釈できます。

$$\frac{a}{a+b}=\frac{2}{9}=0.22\cdots$$

ですから，

(1日に59部以下売れる確率)＝0
(1日に60部以下売れる確率)＝20／100＝0.2
(1日に61部以下売れる確率)＝20／100＝0.2
……………………………………
(1日に69部以下売れる確率)＝20／100＝0.2
(1日に70部以下売れる確率)＝40／100＝0.4
(1日に71部以下売れる確率)＝40／100＝0.4
……………………………………

より，

$$(1\text{日に}69\text{部以下売れる確率})<\frac{a}{a+b}$$

$$\leqq(1\text{日に}70\text{部以下売れる確率})$$

上の定理より，$n=70$がもうけ最大の仕入れ部数となります。

この問題の関連問題として，新聞が売り切れのときの損失を考えるとか，新聞のように1日で価値がほとんどなくなることのない商品について，需要データから仕入れをいつ，どれくらいの量にすると，利益最大になるかをいろいろな条件のもとで解く「在庫問題」があります。

2

半径r，直径ABの円の中心をOとする。円周上の任意の1点Pにおける接線にA，Bから垂線をひき，その足をそれぞれM，Nとすれば
AM＋BNは一定である。
(以下作図はすべてfree handでよい。)

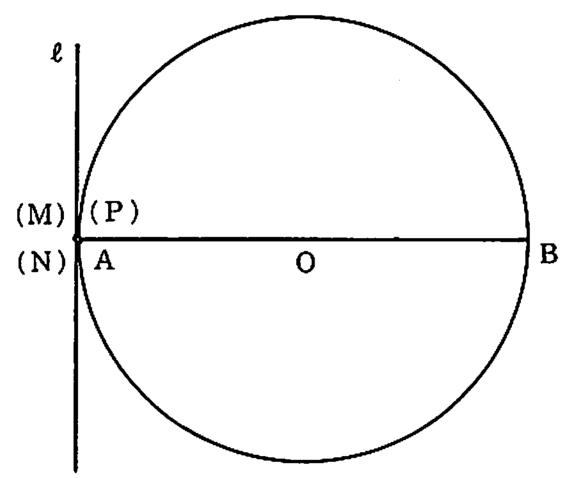
問1　点Pが点Aと一致する場合
AM＋BNはどのような値をとるか。図をかいて説明せよ。

問2　点Pが点A，Bと異なる場合について，題意に適する図をかけ。

問3　問2の場合について
AM＋BNが一定であることを証明せよ。

着眼点

すなおに図をかいてみよう。
問1では，



P(Aと一致する)における円の接線を l とすれば
$l\perp AB$

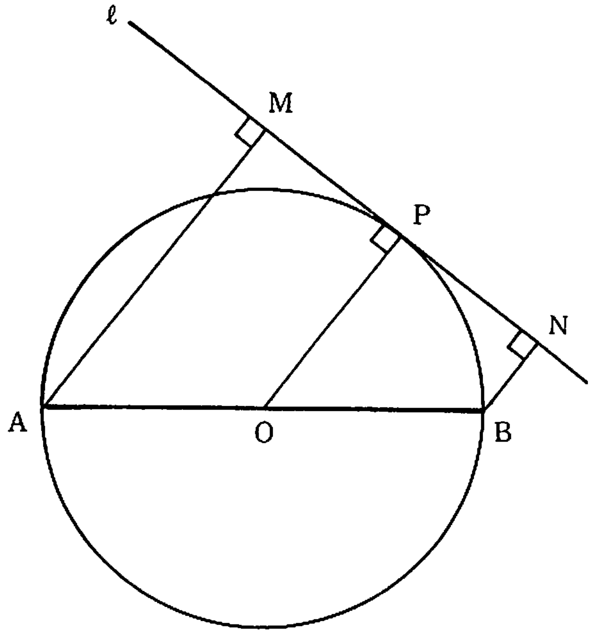
よってA，Bから l にひいた垂線の足M，NともにP，Aと一致してしまう。

よってAM＋BN＝AB＝$2r$ (一定)

問2，問3，仮定を整理する。

1　点Pは点A，Bと異なる。
2　ABは直径
3　直線MPN(l)は接線
4　AM$\perp l$，BN$\perp l$

この4つの仮定から
AM＋BN＝一定
を導くのが問3である。



この図において一定なものをさがしてみると，まず目につくのが円の半径である。

直角も一定の大きさではあるが，長さに関係あるものとしては半径があるから，AM＋BN は半径に関係ありそうだと予想してみるのが自然であろう。

さてこの AM，BN と半径との関係を結びつける手段を求めるため，仮定をふり返ってみる。

仮定 1 はすでに作図の段階で使っている。

仮定 2 より O は AB の中点 ……………………①

仮定 3 より $OP \perp l$

仮定 4 とあわせて $AM \parallel BN \parallel OP$ ………②

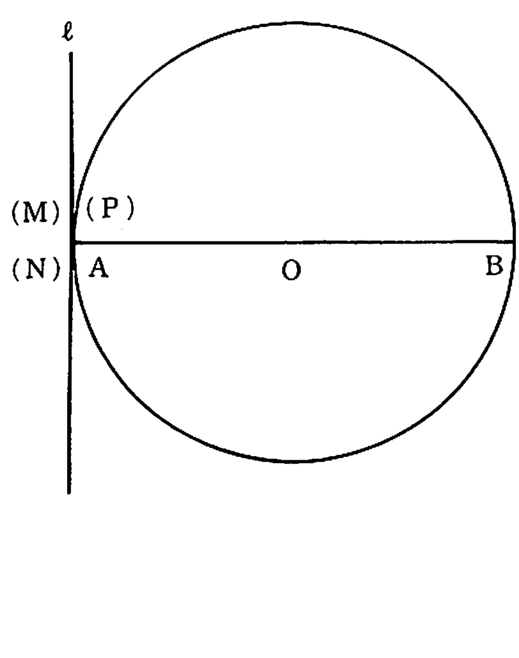
①と②から，中点連結定理がつかわれて

$AM+BN=2OP=2r$

が得られて証明は完了する。

解答例

問 1



P (A と一致) における円Oの接線を l とすれば

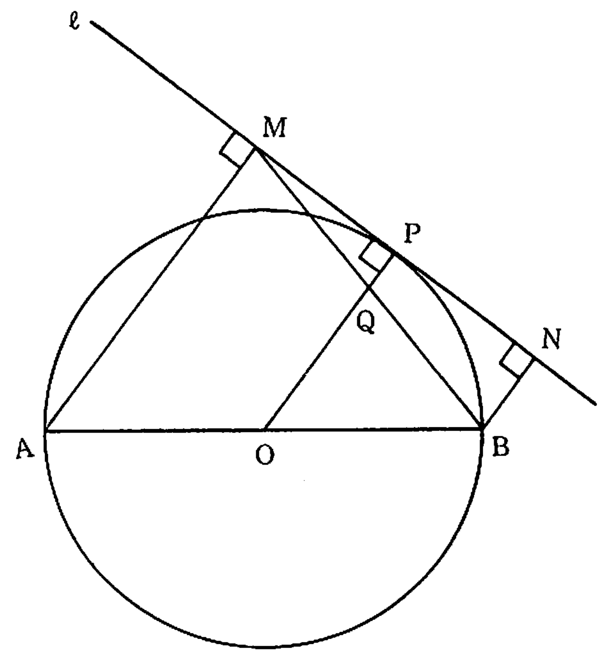
$l \perp AB$

よって A，B から l にひいた垂線の足 M，N もともに P，A と一致してしまう。

よって

$AM+BN=AA+BA=AB=2r$

問 2



問 3〔証明〕

作図により

$AM \perp l$,　$BN \perp l$

P は接線 l の接点だから

$OP \perp l$

$\therefore AM \parallel BN \parallel OP$

AM と BN は直線 OP に関して反対側にあって平行だから M，B をむすべば OP と交わる。その交点を Q とすれば

$\triangle BAM$ において $AM \parallel OQ$，$BO=OA$

$\therefore BQ=QM$　　$AM=2OQ$ ………①

$\triangle MBN$ において $BN \parallel QP$，$BQ=QM$

$\therefore BN=2QP$ ……………………………②

①＋②

$AM+BN=2OQ+2QP=2(OQ+QP)$

$=2OP=2r$ (一定)　(証明終)

3

中心(0, 0)，半径 r の円周を C_r とおく。ただし $r>0$。C_r 上の点 $(x,\ y)$ で，$x+y$，xy がともに整数となる点の個数を $P(r)$ とおく。次の問に答えよ。

問1　C_1上の点(x, y)で$x+y, xy$がともに整数となる点をすべて求めよ。P(1)はいくらか。

問2　$C_{\sqrt{3}}$上の点(x, y)で$x+y, xy$がともに整数となる点を求めよ。$P(\sqrt{3})$はいくらか。ただし，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。

問3　$r=a\sqrt{2}$のとき，$P(r)=20$となるようにaを定めよ。ただし，aは正の整数で，$\sqrt{2}=1.414\cdots$。

着眼点　I

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x+y=u \text{ (但し } u \text{ は整数)} \end{cases}$$

とおくと$P(r)$は次の条件をみたす集合の点(x, y)の個数である。

$$\begin{cases} \text{(i)} & -\sqrt{2}\,r \leqq u \leqq \sqrt{2}\,r \\ \text{(ii)} & (x, y)=\left(\dfrac{u\pm\sqrt{2r^2-u^2}}{2}, \dfrac{u\mp\sqrt{2r^2-u^2}}{2}\right) \quad \text{複号同順} \\ \text{(iii)} & xy=\dfrac{u^2-r^2}{2} \text{ (整数)} \end{cases}$$

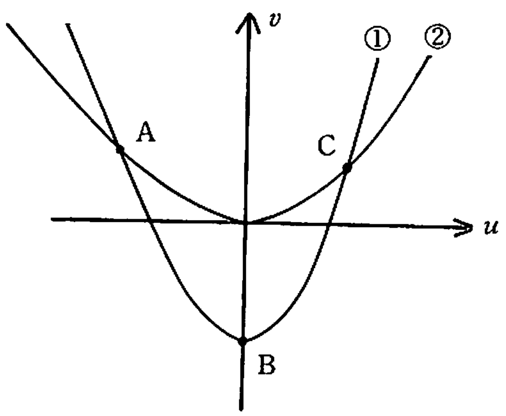
(ii)から当然$x+y=u$となり，解法のポイントは(i)(iii)にあることになる。すなわち，(i)をみたすuを(iii)が整数となるように拾っていけばよいのである。

このとき，(iii)から

$$\begin{cases} r^2\text{が偶数のとき，} u^2\text{も偶数} \\ r^2\text{が奇数のとき，} u^2\text{も奇数} \end{cases}$$ に注意

以上のことから，任意の半径rに対して(x, y)の個数が評価できる。

II　次の方法もある



$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x+y=u \quad (u, v \text{ は整数}) \\ xy=v \end{cases}$$ から

$u^2-2v=r^2$………①がでる。

解と係数の関係を用いて $v \leqq \dfrac{1}{4}u^2$ ………②

①②より，求める(x, y)は上図の曲線ABC上にくる格子点(u, v)を求めることによって決まる。特に点A，点Cでは解が重解となり，一組の(u, v)に対して，一組の(x, y)が決まることをみるにはIよりみやすい。

解答例

問1　$\begin{cases} x^2+y^2=1 \text{ ………①} \\ x+y=u \text{ ………②} \end{cases}$

①②より，判別式をとって$-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2}$

$u=0, \pm1$

$xy=\dfrac{u^2-1}{2}$だから

$xy=\dfrac{u^2-1}{2}$，xy 整数

したがって$u=\pm1$，$v=0$

(i)$\begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$　(ii)$\begin{cases} u=-1 \\ v=0 \end{cases}$

解と係数の関係を利用して

$\therefore (0, \pm1)(\pm1, 0)$，$P(1)=4$

問2　$\begin{cases} x^2+y^2=3 \text{ ………①} \\ x+y=u \text{ ………②} \end{cases}$

①②より，$-\sqrt{6} \leqq u \leqq \sqrt{6}$，$u=0, \pm1, \pm2$

$xy=\dfrac{u^2-3}{2}$，xy 整数

したがって，$u=\pm1$，$v=1$

(i)$\begin{cases} u=1 \\ v=-1 \end{cases}$　(ii)$\begin{cases} u=-1 \\ v=-1 \end{cases}$

解と係数の関係を利用して

$\therefore \left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$

$\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$（複号同順）

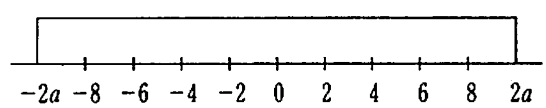
$P(\sqrt{3})=4$

問3　$r=a\sqrt{2}$より

$-2a \leqq u \leqq 2a$

$v=\dfrac{u^2-r^2}{2}=\dfrac{u^2-2a^2}{2}$

したがって，uは偶数。



$P(r)=20$より　$8<2a \leqq 10$

$\therefore a=5$と推定できる。

$$\begin{cases} u^2-2v=m^2 \cdots\cdots\cdots ① \\ 4v=u^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$ より

$u=\pm\sqrt{2}\,r$　　$r=a\sqrt{2}$だから

$u=\pm 2a$

このとき①②の交点で$(u,\ v)$は整数かつ重解。

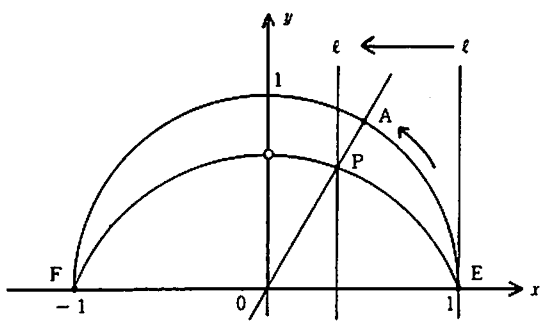
したがって，$u=\pm 2a$で$(x,\ y)$は一組。

$\therefore a=5$

4

下図のように，y軸に平行な直線lが，初め直線$x=1$と重なっており，2秒後に直線$x=-1$に重なるまで等速度で移動するものとする。一方，動点Aは直線lと同時に点E(1, 0)を出発し，図のように原点Oを中心とする半径1の半円周上を一定の速さで移動し，2秒後に点F(−1, 0)に達するものとする。直線lと直線OAの交点をPとし，点Pの座標を$(x,\ y)$とおく。ただし，$x\neq 0$とする。

点Pの軌跡は，〝円積曲線〟と呼ばれている。次の各問に答えよ。



問1　直線lおよび動点Aが同時に出発してから，t秒後の点Pのx座標をtの式で表せ。
ただし，$0\leqq t\leqq 2$とする。

問2　点Pの各座標xとyの関係式を求めよ。ただし，角を使うときは度数法，弧度法のいずれを用いてもよい。以後同様とする。

問3　この円積曲線上に2点P, Qをとり，この2点からそれぞれx軸へ下ろした垂線とx軸との交点をM，Nとする。MN$=a$のとき，∠POQをaを用いて表せ。

問4　解答欄において，∠POEが図のように与えられている。Pは曲線上の点である。このとき，この曲線と定木とコンパスを用いて，∠POEを3等分する方法を解答欄の図に書き加え，解答欄の枠内に，作図方法を簡単に書け。問3が正解でない場合は不可とする。

着眼点

問1　問題文をよく読めば，解決するはずです。

問2　交点Pが，どんな方程式で表される図形上にあるか。という質問です。tを変数として，xおよびyを表し，tを消去していけばよい。

問3　問4につなげる問題。線分MNの長さと∠POQが1次の関係にあることがポイント。問1，問2の問題を解く中で，解決法が見出せる。

問4　問3ができれば，作図法は簡単といえる。ただ確認のため書き加えるが，定木とは〝既知の2点を結ぶ直線を引くことができる道具〟であり，長さを測るものではない。また，コンパスとは〝既知の点を中心として，既知の点を通る円を描くことができる道具〟である。また，そのように描いた直線と円の交点を見出すことは可能として許されている。

この問題は，古代ギリシアで研究された〝作図の3大問題〟の1つで，〝任意の角の3等分を作図せよ〟というものです。もちろん定木とコンパスだけを使っての話しである。しかし，この作図は不可能であるが，紀元前425年頃，ソフィスト（数学等の教師集団）の中でエリス（地名）のヒッピアス（人名）という人が，円積曲線を用いて，任意の角のn等分ができることを示していた。

解答例

問1　直線lは，1秒間に1左に進むから，t秒間にt左に進む。よって，$x=1-t$ ………（答）

問2　直線OAの方程式は$y=(\tan 90^\circ t)x$

点Pのy座標は，$y=(\tan 90^\circ t)(1-t)$

問1から，$t=1-x$

故に，$y=\{\tan 90^\circ(1-x)\}x$

$=\{\tan(90^\circ-90^\circ x)\}x$

$=\dfrac{x}{\tan 90^\circ x}$ ………（答）

問3　2点P，Qのx座標をそれぞれp，qとする。

問1から，$p=1-t_1$，$q=1-t_2$となるt_1，t_2がとれる。

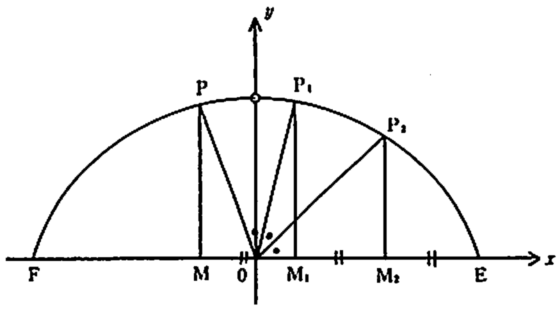
そのとき，∠POE$=90^\circ t_1$，∠QOE$=90^\circ t_2$

故に，∠POQ$=|$∠POE−∠QOE$|=90^\circ|t_1-t_2|$

一方，$|p-q|=|t_1-t_2|=a$だから

∴∠POQ$=90^\circ a$ ………（答）

問 4



点Pからx軸に下した垂線の足をMとする。線分MEを3等分した点をMに近い方から，M_1，M_2とおく。M_1，M_2からy軸に平行な直線を引き，この曲線との交点をP_1，P_2とおく。そのとき，線分OP_1，OP_2は∠POEを3等分している。

5

xについての整式で与えられる関数$f(x)$に対して，関数$\Delta f(x)$（Δはデルタとよむ），$\Delta^2 f(x)$，$\Delta^3 f(x)$，……，を次のように定義する。

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$

$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$

$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)$

例，$f(x)=x^2$のとき，

$\Delta f(3)=f(3+1)-f(3)=4^2-3^2=7$

次の問に答えよ。

問 1　$f(x)=x^2$について，$\Delta f(1)$，$\Delta^2 f(1)$の値を求めよ。

問 2　$f(x)=x^3$のとき次の表を完成させせよ。

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
−3	−27	19	−12	
−2	−8	7		
−1	−1			
0				
1				
2				
3				
4				
5				

問 3　関数$f(x)$が2次関数であることと，$\Delta^2 f(x)$が0以外の定数になることは同値であることを示せ。

着眼点

問1，問2は，関数$\Delta f(x)$，$\Delta^2 f(x)$，$\Delta^3 f(x)$，……，の定義を理解していれば簡単である。

問3は逆の証明をどのように説明するかが問題である。

解答例

問 1　$\Delta f(1)=f(1+1)-f(1)=f(2)-f(1)$

$=2^2-1^2=4-1=\underline{3}$

$\Delta^2 f(1)=\Delta f(2)-\Delta f(1)$

ところで，$\Delta f(2)=f(3)-f(2)=9-4=5$

よって，$\Delta^2 f(1)=5-3=\underline{2}$

問 2

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
−3	−27	19	−12	6
−2	−8	7	−6	6
−1	−1	1	0	6
0	0	1	6	6
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	
4	64	61		
5	125			

問 3　$f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$とおく

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$-(ax^2+bx+c)$

$=2ax+a+b$

$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$

ところで，

$\Delta f(x+1)=f(x+2)-f(x+1)$

$=a(x+2)^2+b(x+2)+c$

$-\{a(x+1)^2 b(x+1)+c\}$

$=2ax+3a+b$

ゆえに，

$\Delta^2 f(x)=2ax+3a+b-(2ax+a+b)=2a$

$=$定数$(\neq 0)$

逆に，$\Delta^2 f(x)$で定数となるとき，$f(x)$が1次関数のとき$\Delta f(x)$で初めて定数となり，$f(x)$が3次以上の関数のとき$\Delta^2 f(x)$では定数とはならない。よって，$\Delta^2 f(x)$で定数となるとき，$f(x)$は2次関数である。

第　9　回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成３年１月13日(日)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第9回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　村　上　　　侃

第9回北海道高等学校数学コンテストが今年も全道各地から中学生を含む多数の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。とくに今年は例年を上回る参加者を得て実施できたことは，このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表われとうれしく思うとともに，全道各地で熱心に指導に当っておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

昨年は北京で行われた国際数学オリンピックに日本が初めて参加しましたが，本道からも高校生がこれに参加し立派な成績をあげてくれたこともうれしいことでした。数学コンテストや国際数学オリンピックは，単に数学の問題を解く力を競いそれに優劣をつけるためのものではありません。このコンテストをとおして，数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則，論理的思考力や創造的な考え方を生徒自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ，数学にたいする興味・関心を高めることにあります。さらに，このコンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え，それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりになりましたが，北海道教員委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校長協会より賜わりました後援並びに北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたるご高配に厚く御礼申し上げるとともに，今年もまた出題，採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部，さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に深く感謝申し上げます。

●成績優秀者

辻田 将俊	小山内 久人	杉村 貴士	篠崎 昭宏
山崎 浩一	鈴木 公祥	中江 富人	四ツ柳 茂樹
夏井坂 光輝	斎藤 敦志	北畠 徹也	北 淳司
田澤 志郎	池田 雅人	後藤 貴裕	木村 暁
谷口 智之	石井 尚之	鹿礒 朋久	藤木 貴子

第9回　数学コンテスト度数分布

得点	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
40	22	41	3	11	10
39	6	1	0	1	0
38	46	4	0	1	2
37	7	5	1	0	1
36	1	0	0	0	1
35	10	46	1	6	6
34	2	0	0	1	3
33	1	3	2	0	0
32	0	0	0	0	54
31	0	0	0	0	0
30	9	35	14	9	4
29	2	0	0	1	1
28	3	1	1	0	0
27	2	0	3	0	6
26	0	0	0	0	4
25	27	28	3	2	1
24	1	0	0	0	14
23	4	0	3	1	0
22	2	15	2	0	77
21	0	0	0	1	5
20	20	44	14	23	3
19	0	0	1	0	9
18	0	4	0	1	1
17	2	1	1	1	1
16	1	0	0	0	5
15	35	5	17	11	2
14	2	0	0	0	5
13	1	1	0	5	3
12	4	5	0	0	4
11	0	0	1	0	1
10	1	6	12	99	7
9	0	0	0	0	4
8	3	0	0	1	3
7	35	0	1	0	1
6	0	0	0	1	7
5	0	5	100	1	0
4	0	0	1	0	8
3	0	0	0	0	0
2	0	8	0	0	2
1	0	0	0	0	0
0	21	12	89	93	15
受験者数	270	270	270	270	270
総　計	6,252	7,051	2,188	2,888	5,923
平均点	23.1	26.1	8.1	10.6	21.9
S・D	13.2	11.2	9.7	11.0	10.2

階級	合計
200 ～ 200	0
195 ～ 199	0
190 ～ 194	2
185 ～ 189	0
180 ～ 184	0
175 ～ 179	3
170 ～ 174	4
165 ～ 169	2
160 ～ 164	4
155 ～ 159	8
150 ～ 154	4
145 ～ 149	7
140 ～ 144	3
135 ～ 139	6
130 ～ 134	10
125 ～ 129	14
120 ～ 124	6
115 ～ 119	8
110 ～ 114	9
105 ～ 109	13
100 ～ 104	8
95 ～ 99	14
90 ～ 94	9
85 ～ 89	6
80 ～ 84	13
75 ～ 79	11
70 ～ 74	13
65 ～ 69	14
60 ～ 64	16
55 ～ 59	11
50 ～ 54	3
45 ～ 49	9
40 ～ 44	5
35 ～ 39	4
30 ～ 34	6
25 ～ 29	5
20 ～ 24	6
15 ～ 19	2
10 ～ 14	4
5 ～ 9	3
0 ～ 4	5
270	
24,302	
90.0	
42.8	

1

ある売店では，毎日1回発行される新聞を売っている。この新聞を1部70円で仕入れ（買い取り），1部90円で売っている。その日仕入れた新聞が全部売り切れたら店じまいし，逆に売れ残りがでたらその日のうちに廃棄してしまうものとする。1日に仕入れる新聞の部数は，1度決めると，その後100日間は変更できない。1日に何部仕入れるのがいちばんもうかるかを知りたい。資料として，過去100日間のその売店での需要部数を調査した下のような表がある。この表から，たとえば需要が90部の日は100日間のうち40日間であることが分かる。

需要部数	60部	70部	80部	90部	100部	計
日　数	20日	20日	10日	40日	10日	100日

これから100日間も上の表と同じような需要があるものと仮定する。このとき，1日にn部仕入れたときの今後100日間の利益合計を$f(n)$円とする。ただし，売り切れによる損失や，売れ残りの新聞を廃棄する費用は0円と仮定する。

$f(n)=$(100日間の売上合計)$-$(100日間の仕入れ合計)

であり，$n=30$のときは，$f(30)=60000$,
$n=95$のときは，$f(95)=50500$となる。

このとき，次の各問に答えよ。

問1　$f(40)$はいくらか。

問2　$f(100)$はいくらか。

問3　nが$70\leqq n\leqq 80$をみたす自然数であるとき，$f(n)$を表す式を求めよ。

問4　$f(n)$を最大にする自然数nを求めよ。また，その理由を簡単に説明しなさい。

講　評

「解答と解説」の解答例に誤りがあったので，次のように訂正してお詫びする。

問2の最終行	20000	2000
問3の3行目	$=90\times2600+\cdots$	$=90\times2500+\cdots$
問3の4行目	$=234000-1600n$	$=225000-1600n$

この問題の配点は，問1を7点，問2を8点，問3を10点，問4を15点，合計40点とした。採点の方針は，①最終結果が誤っていても，やり方，計算方法が正しいとわかるようなものは最小限の減点にする，②最終結果のみで説明の不十分なものは，問1，問2を除き，①より多く減点する，③アイディアがすぐれている，解答の要領が明確にまとめられている，表現がすぐれている等の答案はできる限り評価する，とした。

具体的には，問1，問2，問3では，計算式が正しいとわかるものは，最終結果が誤っていてもマイナス1点とした。問3は，問題文が「$f(n)$を表す式」を問うているため，「$106000\leqq f(n)\leqq 122000$」という不等式で答えた答案がいくつかみられた。このような問題の場合，ふつうは解答例のような等式を要求しているし，このコンテストでもそのつもりで出題したのである。しかし，不等式のような解釈も成り立つので，理由の記述の十分なものは満点，理由の不十分なものは5点前後とした。問4では，最終結果が正しくても，上の方針②にてらして多少減点したものが多数（「$n=70$」が正しくかいてある者106名のうち減点した者は79名）にのぼった。$f(60)$, $f(70)$, $f(80)$等の値を比較しただけのものは5点のみ，$60\leqq n\leqq 70$等2～3の区間での考察のみの場合は10点，区間$100\leqq n$だけを言及しなかったものは13点，を基準とした。方針③により，細かく説明をしていないが考察が全般にわたっている答案は満点（15点）とした。

各問の正答者（満点あるいはごく小さい減点のみの者）は，全受験者269名のうち問1は242名，問2は200名，問3は142名，問4は83名であった。

問4の解法についてコメントしよう。nを場合分けして$f(n)$を検討することで，$n=70$のとき最大であることを導く解答が多かった。この方法では，すべての場合をもれなく検討することが重要なのだが，$100\leqq n$≦の場合だけが触れられていないために2点減点されたものが多かった。需要が100部を越える日は1日もないのだから，100部を越えて仕入れるとその分損をするわけで，$100\leqq n$の場合を考察する必要はないじゃないか，という声がきこえてきそうだが，今述べたようなことを「簡単に」答案にかいてほしかったのである。だから，式をこまかくかいていないが，文章で解答意図を適確に説明をした，荒木啓伸（23番），石井尚之（217番），四ツ柳茂樹（255番），三木寛仁（273番）の諸君らの解答は満点で評価した。一方，木村暁（43番），南賀一（235番），舘山公一（151番），鈴木公祥（303番）の諸君は，$f(n)$そのものを計算するのではなく，n部仕入れたときの利益$f(n)$と$n+1$部仕入れたときの利益$f(n+1)$を比較してどちらが大きいかを検討し，$n\leqq 69$では$f(n)<f(n+1)$，$70\leqq n$では$f(n)>f(n+1)$を説明する方法をとっていた。この手法は，

下にあげた一般的な定理を証明するときによく使われる方法である。他に，勝股審也（52番）は独自の分類で問題を正しく解いていた。もうけ最大の n は1日の需要平均の $n-80$ であるという結果を導いた者，もうけ最大の n は1日の需要部数として一番多い $n=90$ であるという結果を導いた者が十数名ずついた。このような予想は十分納得できるが，この問題では正しくなかった。しかし，予想をたてたり，アイディアを出すことは重要で評価できる。

この問題では，これからも先と調査した資料どおりの需要があると仮定したが，現実には1日ごとの需要は前もって確定した値としてはわからない。そこで，資料から各 n に対して，（1日の需要が n 部である確率）を推測する。たとえば（1日の需要が60部である確率）＝20／100＝0.2のように。この確率をもとにすると，次のような定理が証明できる。

定理　「ある新聞売り子が新聞を仕入れ，1部売れば a 円の利益をあげるが，売れ残りについては1部につき b 円払えば引き取ってくれるものとする。このときもうけの期待値が最大の仕入れ部数 x は，

$$(1日の需要が x-1 部以下である確率) < \frac{a}{a+b}$$

≦（1日の需要が x 部以下である確率）

をみたす x である。」

この問題は「在庫問題」の一種である。興味をもたれた方は，OR（オペレーションズ・リサーチ）関係の本を参照されたい。

解答例

問1　仕入れた新聞40部はすべて売り切れる。新聞1部につき20円の利益があるから

（1日の利益）$=20\times40$

$f(40)=$（1日の利益）$\times100=20\times40\times100$

$=\underline{80000}$（8万）

問2　$f(100)=$（100日間の売上合計）－（100日間の仕入れ合計）

$=90\times(60\times20+70\times20+80\times10+90\times40+100\times10)-(70\times100\times100)$

$=90\times8000-70\times10000$

$=\underline{20000}$

問3　$f(n)=90\times(60\times20+70\times20+n\times10+n\times40+n\times10)-(70\times n\times100)$

$=90\times2600+90\times n\times60-70\times n\times100$

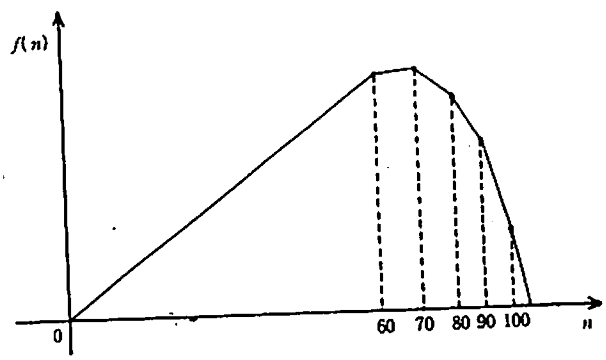
$=\underline{234000-1600n}$

問4　問3と同様にして，$60\leqq n\leqq70$ 等の区間の場合，$f(n)$ は n の1次関数である。また，となりあう2つの区間の境界の n については，どちらの $f(n)$ の式で計算しても値が同じになる（たとえば $f(70)$ は，$60\leqq n\leqq70$ の式で計算しても，$70\leqq n\leqq80$ の式で計算しても，同じ値になる）。よって $f(n)$ のグラフは折れ線になる。各区間での傾きに注目すると，

- $n\leqq60$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝　2000
- $60\leqq n\leqq70$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝　200
- $70\leqq n\leqq80$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－1600
- $80\leqq n\leqq90$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－2500
- $90\leqq n\leqq100$ のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－6100
- $100\leqq n$ 　のとき $f(n)$ のグラフの傾き＝－7000

上記より，$f(n)$ のグラフの概形は図のようになり，$f(n)$ を最大にする n の値は70であることがわかる。

答　$\underline{n=70}$



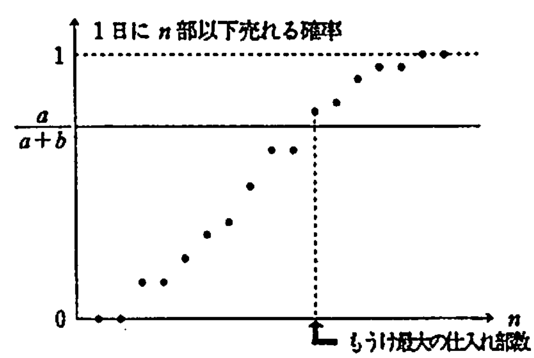
この問題を一般にした問題はすでに研究されていて，次のような定理が得られています。

定理　「ある新聞売り子が新聞を仕入れ，1部売れば a 円の利益をあげるが，売れ残りについては1部につき b 円払えば引き取ってくれるものとする。このときもうけ最大の仕入れ部数 n は，

$$(1日に n-1 部以下売れる確率) < \frac{a}{a+b}$$

≦（1日に n 部以下売れる確率）

をみたす n である。



この問題1にこの定理を適用してみましょう。$a=20$，$b=70$ と解釈できます。

$$\frac{a}{a+b}=\frac{2}{9}=0.22\cdots$$

ですから，

（１日に59部以下売れる確率）＝0

（１日に60部以下売れる確率）＝20／100＝0.2

（１日に61部以下売れる確率）＝20／100＝0.2

……………………………………

（１日に69部以下売れる確率）＝20／100＝0.2

（１日に70部以下売れる確率）＝40／100＝0.4

（１日に71部以下売れる確率）＝40／100＝0.4

……………………………………

より，

（１日に69部以下売れる確率）$<\dfrac{a}{a+b}$

≦（１日に70部以下売れる確率）

上の定理より，$n=70$がもうけ最大の仕入れ部数となります。

この問題の関連問題として，新聞が売り切れのときの損失を考えるとか，新聞のように１日で価値がほとんどなくなることのない商品について，需要データから仕入れをいつ，どれくらいの量にすると，利益最大になるかをいろいろな条件のもとで解く「在庫問題」があります。

2

半径r，直径ABの円の中心をOとする。円周上の任意の１点Pにおける接線にA，Bから垂線をひき，その足をそれぞれM，Nとすれば

AM＋BNは一定である。

（以下作図はすべてfree handでよい。）

問１　点Pが点Aと一致する場合

AM＋BNはどのような値をとるか。図をかいて説明せよ。

問２　点Pが点A，Bと異なる場合について，題意に適する図をかけ。

問３　問２の場合について

AM＋BNが一定であることを証明せよ。

講　評

1．配点基準

問１：10点；問２：10点；問３：20点

生徒は題意に適する図をかくことに馴れていない。図に配点を多くした理由である。また問３が解けなくても，せめて図だけでも点を与えたいの配慮からである。

2．感　想

① 要望に応えて殆んど全部の生徒が問１，２をかいてくれた。従って最低20点を与えられた。一方，問３の完答者も多かったのでテスト問題としては最悪（Ｖ字型）となったが，これは試験上での生徒の気持を少しでもリラックスさせたいという教育的配慮のつもりである。

② 図形移動（含出題の着眼点）

中学校での図形教材の多くはユークリッド平面幾何をinformalにしたものである。ここで最も重要視されるべきものは〝図形移動〟である。それは中学校だけのものではなく高校に進む生徒にとっても重要なのである。所が現場の中学校では高校入試対策の為，心ならずも計算問題に力を注ぐことになり図形移動指導の時間が極端に少なくなる。やがて高校入学した生徒が〝図形移動〟の有効性に気づく時になっても，それは始めて出会った事柄と感ぜられ学習が困難になってくる。また少数ではあろうが中学卒業だけで社会に出た生徒達にとっても初等幾何を単に計算の勉強とだけ印象づけられ，その良さ面白さなどを知らないままに過ぎてしまう。コンテストには必らず一題初等幾何問題を出す意図にはこのコンテストを通して図形移動の面白さを知らせその事を高校での図形教材学習にも役立たせたいとする考えが入っている。

ただし，必らず初等幾何で解くことは要求せず座標幾何，三角関係，ベクトル使用などは認めている。

③ 180°回転（点対称移多）

それらしい考えの解答は３つ程あったが，残念ながら正しい説明の仕方を知らなかった。

④ 中点連結の定理を台形に直接四辺形ABNMが台形であることを示してから直ぐ〝中点連結の定理によって〟として

AM＋BN＝2OP

とかいた解答が４つ程あり，採点に困った。中点連結の定理は三角形に関するものであり，台形に対しては直接には適用されない。然し解答者は，それを知って略したとも考えられ，結局少しく減点することによって処理したが，甘くし過ぎたかも知れない。

⑤ その他の中点連結定理使用

ANまたはBMとOPとの支点をとり，２つの三多形に定理を適用した解答は可成りあった。殆

んどがキチンと処理していた。

⑥ AM と BN の大小関係

⑤のような方法では構わないが他の方法での処理するとき，自分の図だけの証明で終わり，他の場合に触れない解答が多かった。また少数ではあるが AB // MN の case について述べるだけで終ったのもあった。

⑦ ベクトル使用

3名程であったがこれは良くできていた。

⑧ 座標幾何使用

A，B，O，P に座標を与え，円は $x^2+y^2=r^2$ とし，P を通る接線に A，B からの垂線の長さを公式によって求めた方法着眼はよかったが処理に困ったのもあり，特に絶対値記号を外すことには自信がなさそうであった。

始めに生徒の解答には見当らなかった図形移動の例を示す。

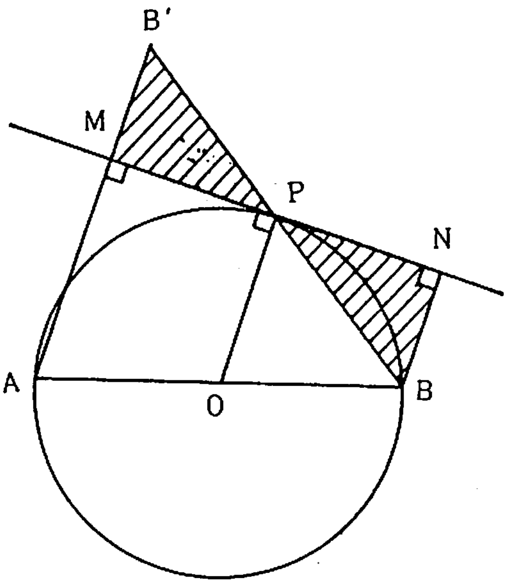
説明簡単化の為，使用する記号についての約束を示す。

A → B　点 A が点 B に移る

$\overline{ABC}$　3点 A, B, C がこの順序で一直線上にある。

∟　90°のこと，∠R は使わはない。

例1　三角形の180°回転



∠M=∠P=∠N=∟から AM // BN となる。

MP : PN=AO : OB= 1 → MP=PN

△BNP を P 中心180°回転すると N → M となる。B → B′とすれば，

∠B′MP=∠BNP=∟から $\overline{B'MP}$ となる。

△ABB′で AO=OB，OP // AB′から

AB′=2OP（中点連結の定理）

AB′=AM+MB′=AM+BN

∴AM+BN=2OP=$2r$

AM，BN の大小相等には無関係にできる。

以下は生徒の解答例を示すが，解答の方法が多種多様で興味深かった。

初等幾何での処理としては，

① AN または BM と OP の交点を求めて中点連結

② O を通って MN に平行線をひき三角形の合同

③ A，O から OP，BN への垂線（B，O から OP，AM への垂線）で三角形合同

④ 面積関係（台形）の計算から，等々。

其他の方法では

① ベクトル計算

② 三角関数使用

③ 座標幾何使用

とあるが，満点を与えた解答の中からいくつかを示そう。尚，図は示さないので各自画いてほしい。

例1　札北一荒木君

PO と NA の交点を Q とする。

また NB // PO // MA より

MP : PN=AO : OB= 1 : 1

中点連結の定理より

AM=2PQ，BN=2QO

AM+BN=2(PL+QO)=$2r$

この idea の解答は多かった。説明文は長短色々であるが，簡にして要を得ている例として示す。

例2　札南一岩崎君

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}$

$=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{PM}$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{BN}$なので大きさを取ってもよい。

$|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{BN}|=2|\overrightarrow{OP}|$

AM+BN=2OP=$2r$

もう1人，ベクトルで成功したのは旭東の稲葉君であったが岩崎君の方を例示した。ベクトルの性質をよく知っている者の良い解答例である。

例3　函中一小西君

∠ABP=θ とすれば

AP=$2r\sin\theta$

接弦定理より，

∠MPA=∠ABP=θ

AM=AP $\sin\theta=2r\sin\theta$

BP=$2r\cos\theta$

$\angle NPB=90^\circ-\theta$

$BN=BP\sin(90^\circ-\theta)$

$=2r\cos\theta\cos\theta=2r\cos^2\theta$

$AM+BN=2r(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2r$

三角関数使用は，外にもあったが，この解答が最もスッキリしていた。

まだ色々な解答例があったが，誌面の都合で割愛した。

毎度の事であるが注意しておきたい。

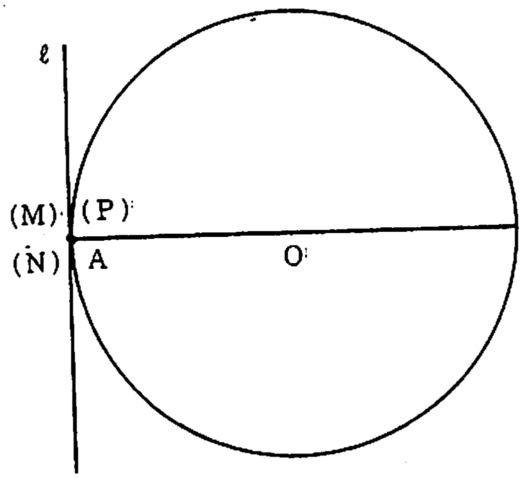
問3の解答の為に問2の図に点の名前を新らしく追加する。または別に図をかいても問2に示されていた文字の外に追加するとき必らずその説明をしなければならないのであるが〝図みたらワカルベ〟的態度で何の説明なしに解答文の中で使ってしまう。これはいけない。

また〝図によって〟とか〝図のように〟とするのもその図の中に新しく追加した点の名前があったときはこれではいけない。

すべて与えられた図に追加する点や線があるときは必らず説明を要するのである。之はまた〝題意に適する図をかく〟ときにも障害になる。〝図のように〟〝図によって〟とかで済ましている者は，題意に適する図をかくことがうまくいかないものである。

解答例

問1



P(Aと一致)における円Oの接線をlとすれば

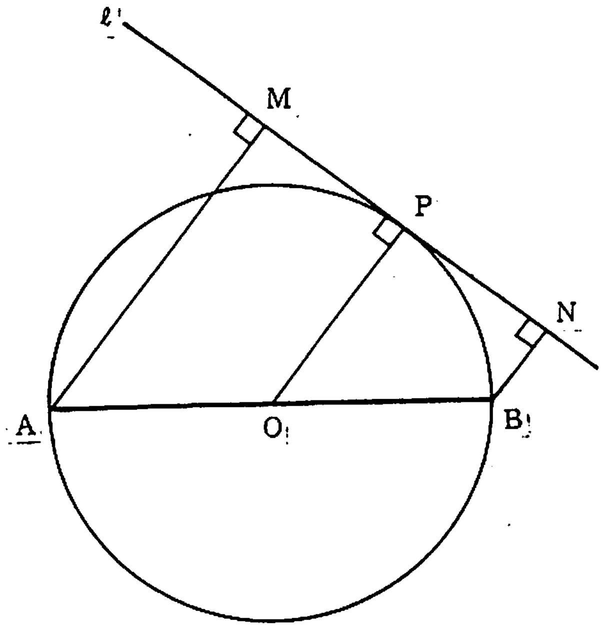
$l\perp AB$

よってA，Bからlにひいた垂線の足M，NもともにP，Aと一致してしまう。

よって

$AM+BN=AA+BA=AB=2r$

問2



問3〔証明〕

作図により

$AM\perp l,\quad BN\perp l$

Pは接線lの接点だから

$OP\perp l$

$\therefore AM \parallel BN \parallel OP$

AMとBNは直線OPに関して反対側にあって平行だからM，BをむすべばOPと交わる。その交点をQとすれば

$\triangle BAM$において$AM\parallel OQ$，$BO=OA$

$\therefore BQ=QM\qquad AM=2OQ$ ………①

$\triangle MBN$において$BN\parallel QP$，$BQ=QM$

$\therefore BN=2QP$ ………………………②

①＋②

$AM+BN=2OQ+2QP=2(OQ+QP)$

$=2OP=2r$（一定）（証明終）

3

中心(0, 0)，半径rの円周をC_rとおく。ただし$r>0$。C_r上の点(x, y)で，$x+y$，xyがともに整数となる点の個数を$P(r)$とおく。次の問に答えよ。

問1　C_1上の点(x, y)で$x+y$, xyがともに整数となる点をすべて求めよ。P(1)はいくらか。

問2　$C_{\sqrt{3}}$上の点(x, y)で$x+y$, xyがともに整数となる点を求めよ。$P(\sqrt{3})$はいくらか。ただし，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。

問3　$r=a\sqrt{2}$のとき，$P(r)=20$となるようにaを定めよ。ただし，aは正の整数で，$\sqrt{2}=1.414\cdots$。

講　評

問1　配点15点（これだけ結論のみ正解を5点とした。）

$x+y=K$とおき，y切片が整数となる条件を利用した解答が多かった。この時，Kのとりうる値の範囲が問題となるが，

$-1\leqq x\leqq 1,\ -1\leqq y\leqq 1$より

$-2\leqq x+y\leqq 2,\ -1\leqq xy\leqq 1$

とした誤りが比較的目立っていた。又，自明としと4点を上げている人がいたが，無理数の形で存在するかもしれないことを考えると，必ずしも自明とは言えない。与えられた条件より明らかでない場合は吟味する態度を是非養ってほしい。

問2　配点15点

問1と同様，y切片を利用した解答が多かった。問1を無事クリヤーした人には取り組みやすい問題であったように思える。

ここでも，$x+y=K$とおくまではよいが，図を参考にしたのが$-3\leqq K\leqq 3$として解答していたのが目についた。

2年生では三角関数を利用して（問1は解ける）解こうとするものがあったが，みたすθを出すには

$$\sin(\theta+45^\circ)=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \sin 2\theta=\pm\frac{1}{3}$$

を同時にみたすθを求めなければならず，無理があるようだ。

問3　配点10点

出来は悪く，正解者は3名であった。問1，問2からみたすべきy切片の個数は10個or11個であることに気付くと$a=5$を導くにはそう時間はかからないと思うが，aの処理の仕方で失敗したケースが多かった。

全体的に，自信をもって解いているし解答もしっかりと書かれていた答案は，札北1年の山崎君，2年の辻田君，北嶺高1年の夏井坂君の3名でした。今後も頑張って下さい。

解答例

問1　$\begin{cases} x^2+y^2=s \\ x+y=t \end{cases}$　として，$s^2-2t=1\cdots\cdots\cdots①$

判明式をとって，$-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$

Oは整数だから

$s=0,\ \pm 1$

①より $\begin{cases} s=0のとき \\ s=\pm 1のとき \end{cases}$　$\begin{cases} t=-\frac{1}{2}\ (不適) \\ t=0 \end{cases}$

解と係数の関係を利用して

$\therefore (1,\ 0)(-1,\ 0)(0,\ 1)(0,\ -1),\ P(1)=4$

問2　$\begin{cases} x+y=s \\ xy=t \end{cases}$　として，$s^2-2t=3\cdots\cdots\cdots①$

判別式をとって，$-\sqrt{6}\leqq s\leqq\sqrt{6}$.

sは整数だから，$s=0,\pm 1,\pm 2$

①より

$$\begin{cases} s=0のとき & t=-\frac{3}{2}\ (不適) \\ s=\pm 1のとき & t=-1 \\ s=\pm 2のとき & t=\frac{1}{2}\ (不適) \end{cases}$$

解と係数の関係を利用して

$$\therefore \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}\right)\ (複号同順)$$

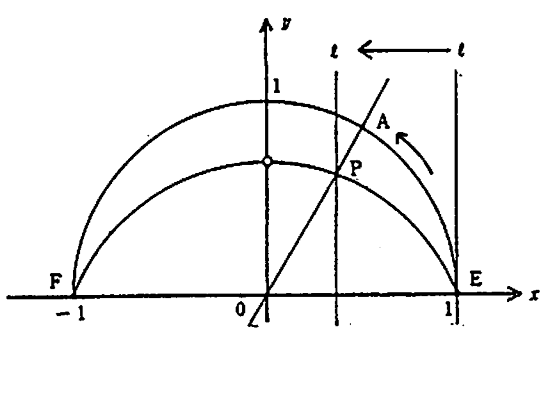
$P(\sqrt{3})=4$

問3　これについては解答とほぼ同じ方法であった。

4

下図のように，y軸に平行な直線lが，初め直線$x=1$と重なっており，2秒後に直線$x=-1$に重なるまで等速度で移動するものとする。一方，動点Aは直線lと同時に点E(1, 0)を出発し，図のように原点Oを中心とする半径1の半円周上を一定の速さで移動し，2秒後に点F(−1, 0)に達するものとする。直線lと直線OAの交点をPとし，点Pの座標を$(x,\ y)$とおく。ただし，$x\neq 0$とする。

点Pの軌跡は，〝円積曲線〟と呼ばれている。次の各問に答えよ。



問1　直線 l および動点Aが同時に出発してから，t 秒後の点Pの x 座標を t の式で表せ。
ただし，$0 \leqq t \leqq 2$ とする。

問2　点Pの各座標 x と y の関係式を求めよ。ただし，角を使うときは度数法，弧度法のいずれを用いてもよい。以後同様とする。

問3　この円積曲線上に2点P，Qをとり，この2点からそれぞれ x 軸へ下ろした垂線と x 軸との交点をM，Nとする。MN$=a$ のとき，∠POQを a を用いて表せ。

問4　解答欄において，∠POEが図のように与えられている。Pは曲線上の点である。このとき，この曲線と定木とコンパスを用いて，∠POEを3等分する方法を解答欄の図に書き加え，解答欄の枠内に，作図方法を簡単に書け。問3が正解でない場合は不可とする。

講評

各問とも10点満点とした。

問1は，答のみでも良しとしましたが，やはり考え方の過程を書き添えたいものです。

問2は，できていた生徒は1割強で，不出来であった。問題文をしっかり読み，意図するものを把握した解答を望みます。

問3以降は，できている生徒はわずかでした。

全体として，運動と座標との関連は理科（物理）で多く扱う内容です。十分考え方に慣れておく必要があると思います。

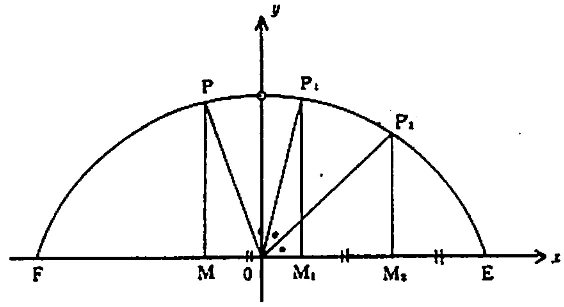
解答例

問1　直線 l は，1秒間に1左に進むから，t 秒間に t 左に進む。よって，$x=1-t$ ………(答)

問2　直線OAの方程式は $y=(\tan 90^\circ t)x$
点Pの y 座標は，$y=(\tan 90^\circ t)(1-t)$
問1から，$t=1-x$
故に，$y=\{\tan 90^\circ(1-x)\}x$
$=\{\tan(90^\circ-90^\circ x)\}x$
$=\dfrac{x}{\tan 90^\circ x}$ ………(答)

問3　2点P，Qの x 座標をそれぞれ p，q とする。
問1から，$p=1-t_1$，$q=1-t_2$ となる t_1，t_2 がとれる。
そのとき，$\angle \mathrm{POE}=90^\circ t_1$，$\angle \mathrm{QOE}=90^\circ t_2$
故に，$\angle \mathrm{POQ}=|\angle \mathrm{POE}-\angle \mathrm{QOE}|=90^\circ|t_1-t_2|$
一方，$|p-q|=|t_1-t_2|=a$ だから
$\therefore \angle \mathrm{POQ}=90^\circ a$ ………(答)

問4



点Pから x 軸に下した垂線の足をMとする。線分MEを3等分した点をMに近い方から，M_1，M_2 とおく。M_1，M_2 から y 軸に平行な直線を引き，この曲線との交点を P_1，P_2 とおく。そのとき，線分 OP_1，OP_2 は∠POEを3等分している。

5

x についての整式で与えられる関数 $f(x)$ に対して，関数 $\Delta f(x)$（Δ はデルタとよむ），$\Delta^2 f(x)$，$\Delta^3 f(x)$，……，を次のように定義する。

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$
$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$
$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)$

例，$f(x)=x^2$ のとき，
$\Delta f(3)=f(3+1)-f(3)=4^2-3^2=7$

次の問に答えよ。

問1　$f(x)=x^2$ について，$\Delta f(1)$，$\Delta^2 f(1)$ の値を求めよ。

問2　$f(x)=x^3$ のとき次の表を完成させよ。

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-3	-27	19	-12	
-2	-8	7		
-1	-1			
0				
1				
2				
3				
4				
5				

問3　関数 $f(x)$ が2次関数であることと，$\Delta^2 f(x)$ が0以外の定数になることは同値であることを示せ。

講評

配点は問1が10点，問2が12点，問3が18点です。

問1，問2は大変よくできていました。

問3は「$\Delta^2 f(x)$が0以外の定数ならば，$f(x)$は2次関数である。」の証明が考えられていない答案がたくさんありました。

逆に，かなり正確に議論しようとした答案があり，苦労の跡が見られました。

数学コンテストは数学I程度の知識ということで，この証明を厳密にするためには限界があると思いますが，できるだけきちんと考えて欲しいところでした。

ところで，この問題で扱った$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$は差分といい，微分の定義から極限を除いた式です。差分は簡単な式ですが，近似・誤差などに発展させることができ興味深い式です。また，微分方程式と同じ様な差分方程式というのもあります。

問3を一般化すると，「$f(x)$がn次の整関数であることと，$\Delta^n f(x)$は0以外の定数になることは同値である。」となることは簡単に予想できることと思います。

解答例

問1　$\Delta f(1)=f(1+1)-f(1)=f(2)-f(1)$
$=2^2-1^2=4-1=\underline{3}$

$\Delta^2 f(1)=\Delta f(2)-\Delta f(1)$

ところで，$\Delta f(2)=f(3)-f(2)=9-4=5$

よって，$\Delta^2 f(1)=5-3=\underline{2}$

問2

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
−3	−27	19	−12	6
−2	−8	7	−6	6
−1	−1	1	0	6
0	0	1	6	6
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	
4	64	61		
5	125			

問3　$f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$とおく

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$
$=a(x+1)^2+b(x+1)+c$
$-(ax^2+bx+c)$
$=2ax+a+b$

$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$

ところで，

$\Delta f(x+1)=f(x+2)-f(x+1)$
$=a(x+2)^2+b(x+2)+c$
$-\{a(x+1)^2 b(x+1)+c\}$
$=2ax+3a+b$

ゆえに，

$\Delta^2 f(x)=2ax+3a+b-(2ax+a+b)=2a$
$=$定数$(\neq 0)$

逆に，$\Delta^2 f(x)$で定数となるとき，$f(x)$が1次関数のとき$\Delta f(x)$で初めて定数となり，$f(x)$が3次以上の関数のとき$\Delta^2 f(x)$では定数とはならない。よって，$\Delta^2 f(x)$で定数となるとき，$f(x)$は2次関数である。

担当委員

井原　鑑	中田保之
小笠原英俊	永渕敬二
河野章二	成田雅博
坂下正雄	林　重一
佐々木光憲	古川政春
鈴木雅博	皆川一雄
中居基昭	湊川三竿
長尾　章	大和達也