第 5 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

昭和62年 1 月15日(木)

9 時00分～12時30分(210分)

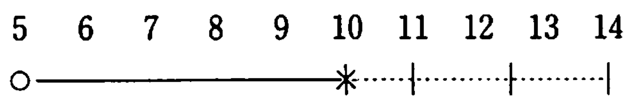
北海道算数数学教育会高等学校部会

問題1　ある装置に6個の電球が取りつけられていて，それぞれの電球は他の電球とは全く無関係に，次の規則に従って点滅するようになっている。

規則「スイッチを入れてから4秒後からどの電灯にも全く偶然に点灯のチャンスが訪れ，このチャンスはまだ点灯していない電球には毎秒訪れるものとする。一度点灯した電球は丁度5秒点灯した後消えて，最初のスイッチを入れたときの状態に戻る。」さて，スイッチを入れてから10.5秒後に装置を観察したところ6個のうち3個が点灯していた。

(1)　13.5秒後には何個の電球が灯点しているだろうか，可能性のある数をすべて挙げよ。

(2)　更に13.5秒後の観察で5個の電球が点灯しているのが認められた。
15.5秒後には何個の電球が点灯しているだろうか，可能性のある数をすべて挙げよ。
例えば丁度5秒に点灯した電球は実線が点灯，点線が消えているとすると下図となる。



問題2　鋭角三角形ABCの垂心をHとする。3辺BC，CA，ABに関するHの対称点を，それぞれP，Q，Rとするとき，次の各問に答えよ。

問1：P，Q，Rは△ABCの外接円周上にある。このことをPについて証明せよ。

問2：PQとCAの交点をJとすれば∠CHJ＝∠CQPとなることを証明せよ。

問3：PRとABの交点をKとすれば，K，H，Jは一直線上にあることを証明せよ。

注1：1問毎に解答には必らず図をつけよ。free handでよい。

注2：垂心とは三角形の各頂点から対辺に下した垂線の交点でそれは唯1点である。

問題3　Sは整数の集合で(イ)，(ロ)を満たすものとする。

(イ)　$\ell \in S$，$m \in S$のとき$\ell + m \in S$（pがSの要素のとき$p \in S$と表わす)。

(ロ)　Sは正の整数と負の整数を含み最小の正の整数はa，最大の負の整数はbである。

(1)　$c \in S$のとき$nc \in S$（nは正の整数）であることを示せ。

(2)　$a+b=0$を示せ。

(3)　$p \in S$，$p>0$である任意のpに対してpはaの倍数（$p=qa$）であることを示せ。

（ヒント：$p=qa+r$を利用する方法もある。)

問題 4 5次以下の x の多項式で，どの係数も 1 または 0 よりなるものをすべて集めて集合を作り，それを A で表す。

$A=\{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f \mid a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ は 0 または 1$\}$

ただし，$0=0\cdot x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0$，$1=0\cdot x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x+1$ と見なして，0 と 1 も A の要素とする。

(1) A は何個の多項式よりなる集合か。(A の要素の個数を求めよ。)

(2) a が実数のとき，集合 A(a)を $A(a)=\{g(a) \mid g(x)\in A\}$ とおく。($g(x)$が A の要素のとき，$g(x)\in A$ または $A\ni g(x)$とかく)このとき，(i) A(0)の要素の個数を求めよ。

(ii) A(1)の要素の個数を求めよ。

(iii) A(2)の要素の個数を求めよ。

問題 5 X をある集合とする。$a,\ b\in X$ に対して，a と b の距離を $d(a,b)$で表わすことにする。

ここで距離とは次の三つをみたすものとする。

(i) $d(a,b)\geqq 0$ であり，$d(a,b)=0\Rightarrow a=b$，さらに $a=b\Rightarrow d(a,b)=0$

(ii) $d(a,b)=d(b,a)$

(iii) $d(a,c)\leqq d(a,b)+d(b,c)$ $(a,\ b,\ c\in X)$

この $d(a,b)$を使って $d'(a,b)$を次のように定めると $d'(a,b)$もまた，a と b の距離になることを次の順序で示せ。

$$d'(a,b)=\frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$$

(1) $d'(a,b)\geqq 0$ であり $d'(a,b)=0\Rightarrow a=b$，さらに $a=b\Rightarrow d'(a,b)=0$ であることを示せ。

(2) $d'(a,b)=d'(b,a)$を示せ。

(3) $r_1\geqq 0$，$r_2\geqq 0$，$r_3\geqq 0$ のとき $\dfrac{r_1}{1+r_1}+\dfrac{r_2}{1+r_2}\geqq\dfrac{r_1+r_2}{1+(r_1+r_2)}$を示せ。

(4) (3)と関数 $y=f(x)=\dfrac{x}{1+x}$(x は $x\geqq 0$ である実数)が増加関数であることを使って

$d'(a,c)\leqq d'(a,b)+d'(b,c)$であることを示せ。

昭和61年度(昭和62年1月15日実施)

第5回
北海道高等学校数学コンテスト

解答と解説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

ある装置に６個の電球が取りつけられていて，それぞれの電球は他の電球とは全く無関係に，次の規則に従って点滅するようになっている。

規則「スイッチを入れてから４秒後からどの電灯にも全く偶然に点灯のチャンスが訪れ，このチャンスはまだ点灯していない電球には毎秒訪れるものとする。一度点灯した電球は丁度５秒点灯した後消えて，最初のスイッチを入れたときの状態に戻る。」さて，スイッチを入れてから10.5秒後に装置を観察したところ６個のうち３個が点灯していた。

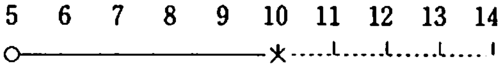
(1)　13.5秒後には何個の電球が灯点しているだろうか。可能性のある数をすべて挙げよ。

(2)　更に13.5秒後の観察で５個の電球が点灯しているのが認められた。

15.5秒後には何個の電球が点灯しているだろうか，可能性のある数をすべて挙げよ。

例えば丁度５秒に点灯した電球は実線が点灯，点線が消えているとすると右図となる。

5　6　7　8　9　10　11　12　13　14



着眼点　規則はそれぞれの電球について

① 「スイッチを入れてから少なくとも４秒間は点灯しないこと」

② 点灯した電球は５秒間点灯している。

③ 消えた後はスイッチを入れた状態である。従って10.5秒後に点灯している電球，消えている電球の状態の可能性について調べる。

解答例

i) 10.5秒後に点灯していた電球については10秒後に初めて点灯したものであれば，13.5秒後にも点灯している。

8秒後に初めて点灯したものであれば，13.5秒後には消えている。

10.5秒後に消えていた電球については13.5秒後には点灯している可能性も，消えたままでいる可能性もある。従って，すべての電球が13.5秒後には点灯している可能性も，消えたままでいる可能性もあるので，点灯している可能性のある数は０～６である。

ii) 10.5秒後，13.5秒後の観察の結果規則により，15.5秒後の予測をすると次の表のようになる。○は点灯，×は消えている状態を表す。

10.5秒後	13.5秒後	15.5秒後の可能性
○	○	×
○	○	×
○	×	× ○
×	○	○
×	○	○
×	○	○

10.5秒後	13.5秒後	15.5秒後の可能性
○	○	×
○	○	×
○	○	×
×	○	○
×	○	○
×	×	× ○

これより，15.5秒に点灯している電球の数は２・３・４のいずれかの数である。

2

鋭角三角形ＡＢＣの垂心をＨとする。３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢに関するＨの対称点を，それぞれＰ，Ｑ，Ｒとするとき，次の各問に答えよ。

問１：Ｐ，Ｑ，Ｒは△ＡＢＣの外接円周上にある，このことをＰについて証明せよ。

問２：ＰＱとＣＡの交点をＪとすれば∠ＣＨＪ＝∠ＣＱＰとなることを証明せよ。

問３：ＰＲとＡＢの交点をＫとすれば，Ｋ，Ｈ，Ｊは一直線上にあることを証明せよ。

注１：１問毎に解答には必ず図をつけよ。free hand でよい。

注２：垂心とは三角形の各頂点から対辺に下した垂線の交点でそれは唯１点である。

着眼点

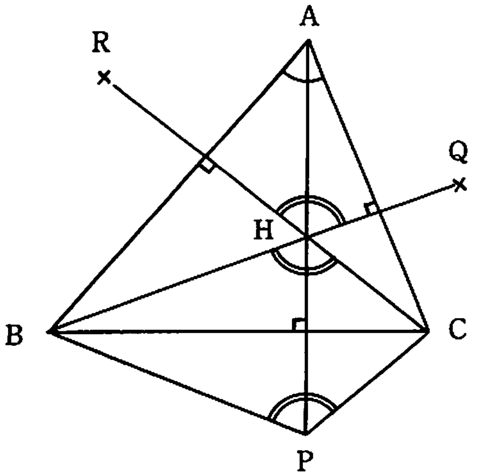
問１：円に内接する四辺形の向い合っている角の和は180°であり，その逆も成り立つこと。線対称となっている図形間の関係を考えること。角や線分の相等に注目。

問２：問１での着眼点の外に，弧ＰＣ上に立つ円周角についての知識。

問３：問２が証明できれば，それがこの証明の hint となっている。

解答例

問1



HとPはBCに関して対称だから

∠BPC＝∠BHC＝∠RHQ…①

BQ⊥AC，CR⊥ABから

∠RHQ＝180°－∠BAC…②

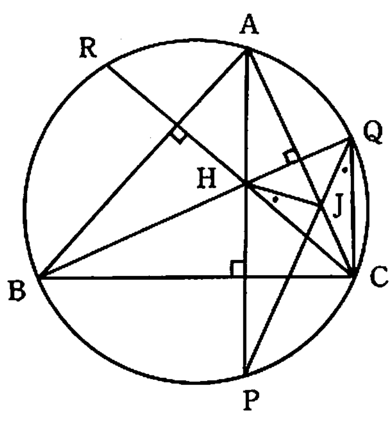
①，②から∠BPC＝180°－∠BAC

i，e，　∠BPC＋∠BAC＝180°

∴　A，B，P，Cは1円周上にある。

Q，E，D，

問2

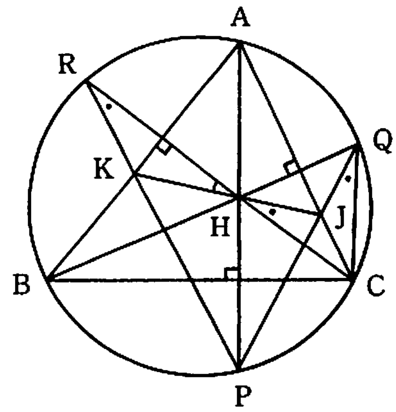


H，QはCAに関して対称だから

∠CHJ＝∠CQJ＝∠CQP　Q，E，D，

ここは，もっと詳しくかいてよいが
線対称の図形関係について詳しくかくと
反って複雑になりすぎることもある。

問3



H，RはABに関して対称だから

問2同様にして∠RHK＝∠KRH

＝∠PRC

＝∠PQC

＝∠CHJ

∴K，H，Jは1直線上にある。Q，E，D，

3

Sは整数の集合で(イ)，(ロ)を満たすものとする。

(イ)　ℓ∈S，m∈Sのとき，ℓ＋m∈S（pがSの要素のときp∈Sと表わす）

(ロ)　Sは正の整数と負の整数を含み最小の正の整数はa，最大の負の整数はbである。

(1)　c∈Sのときnc∈S（nは正の整数）であることを示せ。

(2)　a＋b＝0を示せ。

(3)　p∈S，p＞oである任意のpに対してpはaの倍数（p＝qa）であることを示せ。

ヒント：p＝qa＋rを利用する方法もある。

着眼点

(1)　(イ)を利用2c，3c，…の順次Sの要素であることを示す。

(2)　a＋bはa＋b＞0かa＋b＜0かa＋b＝0のいずれかであるからa＋b＞0，a＋b＜0のとき条件に反すること示し，a＋b＝0を導く。このような間接的証明法を転換法という。

(3)　p＝aq＋r（0≦r＜a）　p∈S　aq＝－bq∈S（(1)より）

∴r＝p－aq＝p＋bq∈S　0≦r＜a，aは最小の正の整数であることに反することを利用する。

解答例

(1) $c \in S$ (イ)より $c+c=2c \in S$, $2c+c=3c \in S$ 以下順に $nc \in S$

(2) $a+b$ は $a+b>0$ か $a+b=0$ か $a+b<0$ のいずれである。

(i) $a+b>0$ とすると　$a \in S$　$b \in S$

$\therefore a+b \in S$

$b<0$ より　　$0<a+b<a$

これは a が S に含まれる最小の正の整数であることに反する。　$\therefore a+b \not> 0$

(ii) $a+b<0$ とすると　$a+b \in S$

$a>0$ より　$b<a+b<0$

これは b が S に含まれる最大の負の整数であることに反する。

$\therefore a+b \not< 0$　　(i)(ii)より $a+b=0$

(3) p を a で割った商を q 余りを r とすると

$p=aq+r$　　$0 \leqq r<a$

$r=p-aq$　(2)より $-a=b$　$\therefore$　$r=p+bq$　$p \in S$　$bq \in S$ より $r \in S$

また，ここで $r \neq 0$ とすると $0<r<a$ より a が最小の正の整数であることに反する　$\therefore r=0$

よって $p=aq$

即ち任意の整数 p は a の倍数である。

4

5次以下の x の多項式で，どの係数も1または0よりなるものをすべて集めて集合を作り，それをAで表す。

$A=\{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f \mid a, b, c, d, e, f$ は0または1$\}$

ただし，$0=0.x^5+0.x^4+0.x^3+0.x^2+0.x+0.1=0.x^5+0.x^4+0.x^3+0.x^2+0.x+1$ と見なして，0と1もAの要素とする。

(1) Aは何個の多項式よりなる集合か。(Aの要素の個数を求めよ。)

(2) a が実数のとき，集合 A(a) を $A(a)=\{g(a) \mid g(x) \in A\}$ とおく。($g(x)$ がAの要素のとき，$g(x) \in A$ または $A \ni g(x)$ とかく)。このとき，(i) A(0) の要素の個数を求めよ。(ii) A(1) の要素の個数を求めよ。(iii) A(2) の要素の個数を求めよ。

着眼点

(1) x の多項式　$g(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ において，x^n ($n=0, 1, 2, 3, 4, 5$) の係数のどれか1つでも異なると，別の異なる多項式となる。逆に言えば，x^n の係数がすべて等しいとき，多項式は一致する。

(2) 記号 A(a) について，a の値の具体的に代入して考えれば，題意がつかめると異う。たとえばAの要素 $g(x)=x^2+x+1$ について，A(1) の要素の1つは $g(1)=1+1+1=3$ となるし，$g(x)=x^2+0.x+1$ については，$g(1)=1+0+1=2$ となる。

解答例

(1) $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ において，a, b, c, d, e, f は0または1をとる値であるし，x^n の係数がどれか1つでも異なると別の異なる多項式となるから，Aの要素の個数は，$2^6=64$ 個となる。

(2) (i) $g(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ とおくと，$g(0)=f$ となるから，f は0と1より　$A(0)=\{0, 1\}$ よって A(0) の個数は2個。

(ii) A(1) の最大数は，$g(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ のとき，$g(1)=6$ であり，最小数は，$g(x)=0$ のとき，$g(1)=0$ である。

よって，$A(1)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ で，個数は7個。

(iii) $g(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ において，

$g(2)=a.2^5+b.2^4+c.2^3+d.2^2+e.2+f$ となり，a, b, c, d, e, f は0と1の値しかとらないから，これは2進数 abcdef と一致する。A(2) の最大数は $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=63$ であり，最小の数は0より，$A(2)=\{0, 1, 2, 3, \cdots 63\}$ で，個数は64個。

5

X をある集合とする。a, $b \in X$ に対して，a と b の距離を $d(a, b)$ で表わすことにする。ここで距離とは次の三つをみたすものとする。

(i) $d(a, b) \geqq 0$ であり，$d(a, b)=0 \Rightarrow a=b$，さらに $a=b \Rightarrow d(a, b)=0$

(ii) $d(a, b)=d(b, a)$

(iii) $d(a,c) \leqq d(a,b)+d(b,c)$ $(a, b, c \in X)$
この $d(a,b)$ を使って $d'(a,b)$ 次のように定めると $d'(a,b)$ もまた a と b の距離になることを次の順序で示せ。

$$d'(a,b)=\frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$$

(1) $d'(a,b) \geqq 0$ であり $d'(a,b)=0 \Rightarrow a=b$，さらに $a=b \Rightarrow d'(a,b)=0$ であることを示せ。
(2) $d'(a,b)=d'(b,a)$
(3) $r_1 \geqq 0$，$r_2 \geqq 0$，$r_3 \geqq 0$ のとき

$$\frac{r_1}{1+r_1}+\frac{r_2}{1+r_2} \geqq \frac{r_1+r_2}{1+(r_1+r_2)}$$ を示せ。

(4) (3)と関数 $y=f(x)=\frac{x}{1+x}$ (x は $x \geqq 0$ である定数）が増加関数であることを使って $d'(a,c) \leqq d'(a,b)+d'(b,c)$ であることを示せ。

着眼点

(1)，(2)はほとんど明らかである。
(iii)の性質を示すには，(3)を $d(a,b)=r_1$，$d(b,c)=r_2$，$d(a,c)=r_3$ として使うことがポイントである。また，関数 $y=\frac{x}{1+x}$ が増加関数であるから $r_3 \leqq r_1+r_2$ であることを使って(4)が証明できる。(i)，(ii)，(iii)をみたす，d が x にあるとき，x を距離空間という。

解答例

(1) $d(a,b) \geqq 0$ であるから $1+d(a,b)>0$。

よって $d'(a,b)=\frac{d(a,b)}{1+d(a,b)} \geqq 0$

(2) $r_1 \geqq 0$，$r_2 \geqq 0$，$r_3 \geqq 0$ のとき

$\frac{r_1}{1+r_1} \geqq \frac{r_1}{1+r_1+r_2}$，$\frac{r_2}{1+r_2} \geqq \frac{r_2}{1+r_1+r_2}$ したがって，$\frac{r_1}{1+r_1}+\frac{r_2}{1+r_2} \geqq \frac{r_1}{1+r_1+r_2}+\frac{r_2}{1+r_1+r_2}=\frac{r_1+r_2}{1+r_1+r_2}$

(3) $r_1=d(a,b)$，$r_2=d(b,c)$，$r_3=d(a,c)$ とおくと(iii)より $r_3 \leqq r_1+r_2$

$y=\frac{x}{1+x}$ $(x \geqq 0)$ が増加関数であるから

$$\frac{r_3}{1+r_3} \leqq \frac{r_1+r_2}{1+r_1+r_2}$$

よって $d'(a,b)+d'(b,c)=$

$$\frac{r_1}{1+r_1}+\frac{r_2}{1+r_2} \geqq \frac{r_3}{1+r_3}=d'(a,c)$$

（証明終り）

第　5　回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

昭和62年１月15日(木)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第５回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　高　田　昭　二

昭和58年１月に第１回「数学コンテスト」を実施して以来今年で第５回目の数学コンテストを終えました。

今回も道内の各地区の多くの高等学校から意欲的な多数の高校生諸君の参加を得て，実施することができましたのは，喜びにたえません。このコンテストを主催している北海道算数数学教育会（北数教）高校部会は道内の高等学校で数学を教えている先生方が，生徒の学力を向上させるために様々な研究を進めている団体です。ここの先生方の話し合いの中で現在の数学教育に何を補うとよいかを考えて「数学コンテスト」を実施することになったのです。

論理的思考力や発展的創造的な考え方，直観力を養うことを目的として，大学の先生や高等学校部会研究部の先生方が出題しております。昨年に引き続き参加した人も相当いるようですが，１年生の諸君は来年も是非参加していただきたい。このような数学コンテスト（数学オリンピックと呼ぶ国もある。）はソビエット（1933年より）米国，ハンガリー等で実施されておりますが，これらの参加者の中から世界的な数学の大学者が数多く生まれております。私達のコンテストは生徒の資質の向上能力のある生徒の発見と開発することを，ねらいとしていますが，欧米のそれに劣らない効果も期待しています。これからも一層精進に精進を重ね更に数学的素養を高め大成していただきたいと思っています。

今回も道教育委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校長協会の暖かいご理解がありましたし，北海道新聞社，福武書店の御支援は何よりも心強いものでありました。然し何といっても第５回コンテストを成功のうちに終えることができましたのは，出題・採点と運営に携わる大学の先生，北数教高校部会研究部の方々の奉仕的な御活動によるものです。深く敬意を表し，今後のご理解，ご協力をお願いする次第です。

この資料を今後の学習に役立てていただければ幸いです。

●成績優秀者

三浦　淳	山口大輔	宮本敦司	森浦　愛
平間順宏	渡辺俊雄	若松健太郎	清水　崇
坂口英一	問山健太郎	大島　環	上野弘人
坂本哲洋	清水康之	石黒洋二	田中現芳
大島道子	金野敬男	駒込理佳	中西正志

第5回　北海道高等学校数学コンテスト

度数分布表(1)

階級	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
40 — 40	11	17	8	53	20
36 — 39	1	9	2	12	2
32 — 35	2	15	6	4	10
28 — 31	7	25	6	17	41
24 — 27	13	19	1	3	14
20 — 23	35	47	13	19	38
16 — 19	7	69	14	3	24
12 — 15	30	42	7		16
8 — 11	9	29	16	85	26
4 — 7	70	44	134	12	11
0 — 3	183	52	161	160	166
人数	368	368	368	368	368
合計	2895	6111	2258	4610	4571
平均	7.9	16.6	6.1	12.5	12.4
S・D	10.35	10.89	9.24	14.96	13.18

度数分布表(2)

階級	合計
180—199	3
160—179	6
140—159	11
120—139	18
100—119	14
80 — 99	26
60 — 79	52
40 — 59	87
20 — 39	82
0 — 19	69
— −1	
人数	368
合計	20445
平均	55.6
S・D	41.34

1

ある装置に６個の電球が取りつけられていて，それぞれの電球は他の電球とは全く無関係に，次の規則に従って点滅するようになっている。

規則「スイッチを入れてから４秒後からどの電灯にも全く偶然に点灯のチャンスが訪れ，このチャンスはまだ点灯していない電球には毎秒訪れるものとする。一度点灯した電球は丁度５秒点灯した後消えて，最初のスイッチを入れたときの状態に戻る。」さて，スイッチを入れてから10.5秒後に装置を観察したところ６個のうち３個が点灯していた。

(1) 13.5秒後には何個の電球が灯点しているだろうか，可能性のある数をすべて挙げよ。

(2) 更に13.5秒後の観察で５個の電球が点灯しているのが認められた。15.5秒後には何個の電球が点灯しているだろうか，可能性のある数をすべて挙げよ。

例えば丁度５秒に点灯した電球は実線が点灯，点線が消えているとすると下図となる。

5　6　7　8　9　10　11　12　13　14

数学という"学科"の知識や経験が全くなくても，人並みの思考力さえあれば，小学生で十分解決できる問題です。数学の各学科の公式や計算法や諸知識に乱されない"なまの数学的思考力"（といっても結局は単純な推理力）を問う，といった，本コンテストの趣旨に100%そった問題でした。

講　評

配点は(1), (2)各20点、結論のみ書いたもの（本当は途中がなければ答案にはならないのですが）は７点としました。つり合い上途中間違っているが結論の正しいものも、正しい結論に達した上での説明表現段階での失敗として７点としました。

ただ，採点者は"暗号文，暗号表"の解読専門家ではありません。数式で処理できる問題でなかったので，他人には一寸わからぬ答案ばかりが続出しました。

（解答について）

(1) 10.5秒時点灯しているもの，消灯しているもの，２種どちらも13.5秒時には点灯していることも消灯していることもある。を説明して結論を出すか，０個～６個の実例を１つずつ（各１つで十分）挙げるか。

(2) 10.5秒時から13.5秒時まで連続点灯のものが３個の場合と２個の場合になる（13.5秒に新たに２個点灯が加わる場合と１個消灯し新たに３個点灯する場合）だけとつかみ，それぞれ15.5秒時を吟味して結論を出す。実例でやるとき，２～４個だけを挙げても駄目，０，１，５，６個がないことの確認が必要。

2

鋭角三角形ＡＢＣの垂心をＨとする。３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢに関するＨの対称点を，それぞれＰ，Ｑ，Ｒとするとき，次の各問に答えよ。

問１：Ｐ，Ｑ，Ｒは△ＡＢＣの外接円周上にある，このことをＰについて証明せよ。

問２：ＰＱとＣＡの交点をＪとすれば∠ＣＨＪ＝∠ＣＱＰとなることを証明せよ。

問３：ＰＲとＡＢの交点をＫとすれば，Ｋ，Ｈ，Ｊは一直線上にあることを証明せよ。

注１：１問毎に解答には必ず図をつけよ。free hand でよい。

注２：垂心とは三角形の各頂点から対辺に下した垂線の交点でそれは唯１点である。

配　点

問１	13点	図	３点	証明文	10点
問２	14点	図	４点	証明文	10点
問３	13点	図	３点	証明文	10点

○ 証明文が無く図だけのときは　１点　減点

問３の図で円のないときは　１点　減点

○ 以上で減点されていても証明文３題共完答のときは減点せず bonus として戻す。

図の三角形が，特別形で特に正三角形にみえる時注意するが減点はしない。

図に点を与える理由

問題の意味を図で表現する能力は生徒達に不足していると考えられるので与えることにした。然し逆に図にかいておけば説明の必要がないと考えている生徒も多い。これは"図の通り""図によって"などと出題される形式の欠点であると考える。問題文中に与えられた点や線の外に自分でつけ加えるときは必ず証明文の中で明らかにする習慣は重要である。いつも最悪だと書いている"図みたらワカルベ"は絶対に不可。

出題の意図

線対称移動（折り返し）についての知識がどの程度あり，またそれを証明にどの程度使えるかをみるために出した。円周角についても同様である。

最良解答例

コンテスト実施後直ぐ渡したパンフレット"解答と解説"にかいてあるので，省略する。証明文は別の書きかたもあるが高々２行位の追加ですむのであって，解答用紙に可成の余白が出るとの予想であった。

参加者の解答について

ここで，これから使う必要上，用語を規定しておく。

初等幾何：中学校で習っている図形に関する学習（特に平面に限っておく）の対象。
座標幾何：高校，数学Ⅰで学習する"平面図形と式"
三角関数：高校，数学Ⅰでの"三角比"と基礎解析での"三角関数"

あと，ベクトルはそのまま。

各題についての概観

○　問１について

参加者が最も苦労したのは問１であった。証明文１行でもかいた者は約270名，そのうち座標幾何で解いた者は44名，正解者６名，これらは計算に自信のある生徒達，特に正解者は抜群の計算力所有者である。三角関数で４名，ベクトルで２名，どちらも成功しなかった。証明に手をつけない者約100名，つまり出題者の予想に反して問１に手こずったわけである。

約230名は初等幾何でやっているが最多方法は三角形の合同定理，線対称移動で処理した者は５名までなかった。三角形の相似利用は数名。

○　問２について

これは全員が初等幾何で証明していて問１を投げてもこれをうまく証明した者もいた。正解者が150名ほどでも知られるように参加者にとって楽な問題であったらしい。ここでも線対称移動ではほんの２，３行で済む。これで処理した者も数名いたが，多くは三角形の合同定理を使って複雑にしていた。

○　問３について

前２題（特に問１）に精力使い果して，ここまで手が届かなかった感じがする。それでも正解者は25名と，仲々である。これも問２が解けていれば，それを使って数行で済むのであるが，そこまでは行けなかったらしい。次に一般的の注意。

ベカラズ集

1．循環論法

これはよく誤まるもので，問１ではＰが外接円周上にあることにして証明を進めていく，問３でもK，H，Jが一直線上にあることにしてやっていく。

2．点をローマ小文字で表わす

そうしていけないという規則はないし実際に大学教授が著書の中で使っている例もあるので困るが一応高校生としては，大文字は点，小文字は線，ギリシャ小文字は角としておいた方が混乱しない。

3．特殊形の図をかく

この問題で，三角形を正三角形にみえるようにかいてはいけない。それは証明で，うっかりしてもともと正三角形と錯覚して証明する。そのようにした者が10数名いた。与えられた三角形を始めから正三角形と，きめつけて問３まで，ていねいに正しく証明した者もいるが，それは無限にある種類のうち，ただ一種類について，どんなに正しく証明しても，ほとんど０点の価値しかない。

4．合同を文章で書く

"△BHCと△BPCは合同である"と文章で書くのは正確を欠くことになって不可。これは必らず△BHC≡△BPCと≡を使わなければならない。≡では両辺の三角形で点の順序が同じでなければならない。もし上式が正しいなら△HBC≡△BPCは誤となる。

≡　には，それだけのきびしさが要求される。

∽　も同じきびしさを持つ。

＝　にはそれがない。△HBC＝△BPC

は，２つの三角形の面積が等しいことを示すものであって点の順序に無関係である。解答者の中に≡とすべき所を＝とした者もいたが１本足りなかったではすまされない。意味が違うのだ。前にもどって△BHC≡△BPCのとき"△HBCと△BPCは合同である"とその合同で，対応頂点，対応辺がどうなっているか不明である。

だから必らず≡を使うべきなのである。

座標幾何での注意

問１を座標幾何で処理した者は計算に参っただろうと思う。それはこの問題では損である。然し一般に座標幾何の要領としては次の通り。

1　座標を与える文字は，できるだけ少ない数にすること。問１であったらA（o，a）B（b，o），C（c，o）だけでよい。H，Pはそれらできまってく

る。この三文字でも大変，まして suffix などつけたら6文字となって苦労は2倍ではなく2乗になる。

2　定点に与える座標に，x, y, z など使ってならない。直線の式などで混乱する。

図のかきかた

1　問題で与えられた点や直線があるとき新しくつけ加える点直線は，できるだけ少なくすること。問1では A, B, C, P, Q, R のほか新しい点はつけ加えないこと。これは問2，問3でも同様である。

2　問1で，もし外接円をかいたなら P, Q, R がその円上にないようにしておくと証明を誤りなくするためによい。

図形移動について

この問題は3つとも，線対称移動を知っていれば（これは中学校で既習）解答例のように，すごくかんたんに処理できるものである。線対称にはものすごい力がある！【或図形があって，或直線を軸として，その図形を対称移動（折り返し）したとき，2つの図形で対応する角の大きさ，線分の長さは等しい。】

参加者のほとんど全員が三角形の合同を何度も使って複雑な証明をしているのは，やはり中学であまり多くの練習をしないからであって無理もないと思う。線対称移動は，平行移動，回転移動とともに合同のままで図形を移動する操作であり，もともと合同である。合同でなく，拡大，縮小させる相似移動という操作もあって，この4つは初等幾何問題解法に重要な基本操作である。このほかに“平行線による等（面）積移動”“円周による等角移動”“円周による等線分積等線分比でもよい”などあって，どれも中学で習う易しい学習である。これに慣れていれば高校での数学に強力に役立つということについて昨年10月北海道算数数学研究大会で高校部会研究部の坂下研究員が発表している。興味ある者は，自分の学校の数学の先生に借りて読んでみることをすすめる。強くなるぞお！！！

$\boxed{3}$

S は整数の集合で(イ), (ロ)を満たすものとする。

(イ)　$\ell \in S$, $m \in S$ のとき $\ell + m \in S$（p が S の要素のとき $p \in S$ と表わす）。

(ロ)　S は正の整数と負の整数を含み最小の正の整数は a，最大の負の整数は b である。

(1)　$c \in S$ のとき $nc \in S$（n は正の整数）であることを示せ。

(2)　$a+b=0$ を示せ。

(3)　$p \in S, p>0$ である任意の p に対して p は a の倍数（$p=qa$）であることを示せ。
（ヒント：$p=qa+r$ を利用する方法もある。）

講　評

集合 S を整数全体の集合と感違いをした答案が大変多かった。$A=\{-2,\ 1,\ 3\}$ $B=\{-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{5}{2}\}$ とあると A は整数の集合，B は有理数の集合である。S を整数全体の集合と考えたため，

(1)では $nc \in S$ を証明するのに nc が整数であれば十分である。

(2)では $a=1$，$b=-1$ だから $a+b=0$

(3)では $p=aq=q$（$\because a=1$）$\therefore p \in S$

となり推論は間違っていないが，最初の条件を間違ってしまったためすべてが違うものになっていた。まことに残念である。いつも条件の吟味を十分にするように心掛けるようにしてほしい。

(1) 2年生以上の生徒で数学的帰納法で証明した答案があった厳密で望ましいと思う，1年生の受験生も心にとめておいてほしい。

(2)は解答例と考え方が皆同じであった。

(3)も殆ど解答例と同じ考え方で証明していたが(2)の $a+b=0$ を利用して

$p=aq+r \in S$（$0<r<a$），$bq \in S$

$\therefore\ p+bq=(a+b)\,q+r=r \in S$

$r<a$ より不合理とするのと，

$r=p-aq=p+bq \in S$ としたのは大体半々であった。いずれにしても(イ)で与えられている条件は $\ell+m \in S$ であって，$\ell-m$ は S の要素かどうかは解らない。与えられた条件から証明することを身につけてほしい。(1)(2)(3)より結局 S は a の整数倍（正負0）の集合である。40点の満点をとった人は金野敬男君（札東）田中現芳君（札南）三浦淳君（札南）宮本敦司君（札北）山口大輔君（札北）髙畑義啓君，大島道子君（岩東）大島環君（岩見沢明成中）の8名で解答の仕方は大同小異でどの答案も優劣がつけがたい。スペースの関係で解答例と違いの大きい髙畑義啓の答案を載せておく，参考にしてほしい。

解答例

(1)　$c \in S$ のとき $nc \in S$（n は正の整数）　……Ⓐ

(i)　$n=1$ のとき

$nc=c$ であるから $nc \in S$

Ⓐが成り立つ。

(ii)　$n=k$（k は正の整数）のときⒶが成り立つと仮定すると　$kc \in S$

$n=k+1$ のとき

$(k+1)\,c=kc+c$ 条件(イ)より

$kc+c \in S$ すなわち $(k+1)c \in S$

したがって $n=k+1$ のときⒶが成り立つ。

(i)(ii)よりⒶは任意の正の整数 n について成り立つ。

(2) $a+b=0 \Leftrightarrow |a|=|b|$

$|a| \neq |b|$ と仮定すると

(i) $|a|>|b|$ の場合

$a+b \in S \quad 0<a+b<a$

となり，a がSに含まれる最小の正の整数であることに反する。

(ii) $|a|<|b|$ の場合

$a+b \in S \quad b<a+b<0$

となりbがSに含まれる最大の負の整数であることに反する。

(i)(ii)より $|a| \neq |b|$ と仮定すると矛循が生ずる

$\therefore |a|=|b|$ すなわち $a+b=0$

(3) $p \neq qa$ (q は正の整数) と仮定すると

$p=sa+r$ ($0<r<a$, r は整数)

と表せる。このとき

$b \in S$ より $sb \in S$

$p+sb=s(a+b)+r=r$

条件(イ)より $r \in S$

これはaがSに含まれる最小の正の整数であることに反する。 $\therefore r=0 \quad \therefore p=qa$

すなわち p は a の倍数である。

$\boxed{4}$

5次以下のxの多項式で，どの係数も1または0よりなるものをすべて集めて集合を作り，それをAで表す。

$A=\{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f \mid a, b, c, d, e, f$ は0または1$\}$

ただし

$0=0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0$,

$1=0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+1$

と見なして，0と1もAの要素とする。

(1) Aは何個の多項式よりなる集合か。(Aの要素の個数を求めよ。)

(2) aが実数のとき，集合A(a)をA$(a)=\{g(a) \mid g(x) \in A\}$

とおく。($g(x)$ がAの要素のとき，$g(x) \in A$ または $A \ni g(x)$ とかく) このとき

(i) A(0) の要素の個数を求めよ。

(ii) A(1) の要素の個数を求めよ。

(iii) A(2) の要素の個数を求めよ。

講評

(1) 多項式の意味も，集合の意味も良く理解しており，題意を良くつかんでいて全体的に高得点であった。一部の人だが，多項式の中に単項式も含まれるのを見落していた人がいた。ただし書きにもあるように，0も1もAの要素であり，もちろん $x=0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+1x+0$ より $x \in A$ である。

大部分の人が，順列の考え方で，$2^6=64$と求めていたが，中には64個の多項式をすべて書き出していた豪傑がいた。

(2) (1)とは異なり，集合A(a)の意味が理解出来ていない人が多かった。(1)で集合Aは64個の要素からなる集合で，Aは変化しません。$g(x) \in A$ の意味は，64個の $g(x)$ について調べなさいということで，その64個の $g(x)$ について $g(a)$ の値を調べればよい。(1)，(2)の採点を終えて，一番嬉しく思った事は，高得点者が大変多かったことです。一部の高校に高得点者が多かったということではなく，受験したほとんどの高校に各々満点者(40点)がいたことは特筆すべき事だと思われる。さらに，中学生がただ一人受験しており，今後が楽しみである。その解答例を載せて講評を終ります。

解答例

(岩見沢市立明成中学校2年B組　大島　環)

(1) $2^6=64$個

(2) (i) A(0) は0又は1より2個

(ii) A(1) $=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A(1) の要素は7個

(iii) A(2) $=a2^5+b2^4+c2^3+d2^2+e2+f$

$=abcdef\ (2)$

よりA(2)の最大の要素は

$2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$

$=\dfrac{2^6-1}{2-1}$

$=2^6-1$

$=63$

又，最小の要素は0

すべての整数は2進法で表すことができるのでA(2)の要素は，0以上63以下のすべての整数。

∴64個ある。

(1987. 2. 2. MON. K.N 記)

$\boxed{5}$

Xをある集合とする。a, b ∈ X に対して，aとbの距離を d (a, b) で表わすことにする。

ここで距離とは次の三つをみたすものとする。
(i) d (a, b) ≧ 0 であり，d (a, b) = 0 ⇨ a=b, さらに a=b ⇨ d (a, b) = 0
(ii) d (a, b) = d (b, a)
(iii) d (a, c) ≦ d (a, b) + d (b, c) (a, b, c ∈ X)

このd (a, b) を使って d′ (a, b) 次のように定めると d′ (a, b) もまた a と b の距離になることを次の順序で示せ。

$$d'(a, b)=\frac{d(a, b)}{1+d(a, b)}$$

(1) d′(a, b) ≧ 0 であり d′(a, b) = 0 ⇨ a=b, さらに a=b ⇨ d′(a, b) = 0 であることを示せ。
(2) d′(a, b) = d′(b, a)
(3) $r_1 \geqq 0$, $r_2 \geqq 0$, $r_3 \geqq 0$ のとき $\frac{r_1}{1+r_1}+\frac{r_2}{1+r_2} \geqq \frac{r_1+r_2}{1+(r_1+r_2)}$ を示せ。
(4) (3)と関数 $y=f(x)=\frac{x}{a+r}$ (x は x≧0 である定数) が増加関数であることを使って d′(a, c) ≦ d′ (a, b) + d′ (b, c) であることを示せ。

問題の意味がわかったものには，前半はやさしかったであろう。逆に，意味がわからなかったものには，何をどうしてよいか見当もつかなかったようだ。ここで，距離空間について，少し説明したいと思う。我々がよく知っている距離は，直線，平面，空間でのユークリッドの距離である。これは，たとえば，平面上の2点，$A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$ に対して $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ などである。しかし，距離というものを，ある集合 X 上で考えたいときには，もちろん座標などはないのだから，自然に，ある公理をみたすもの d を距離と呼ぶようになってしまう。これが問題中の d であり，公理は(i)(ii)(iii)である。したがって，X 上にある距離は1つではない。そこで d′を d′(a,b) = 1/ 1 +d(a, b)で定めると，それがまた距離になる。だから，同じ集合 X でも，どの距離を考えるかによって全くちがうものとして考えなければならなくなる。これが，距離空間とよばれるものである。

ところで，問いの解答のほうであるが，距離をユークリッドの距離で考えている者がかなりいたが上記の説明のように，まちがいである。満点のものもかなりいた。しかし，ユニークなものはあまりなく，「解答と解説」で示したとうりのものがほとんどであった。」それから，(1)の証明では，仮定がなんであるかを理解していない。d′(a, b) = 0 ⇨ a=b を示すのだから，当然，d′(a, b) = 0 が仮定である。ところが，

d(a, b) = 0 より……とするものが多かった。

余談ではあるが，距離空間に関することは，現代数学では，よく見かける考え方である。さらに，位相空間 (topoloyical space) などと呼ばれる，わけのわからないものもあるが，あまりくだらないものと思わず，興味をもってほしい。　(以上)

担当委員

坂下 正雄	湊川 三竿
林 重一	北隅 嘉長
長尾 章	河野 章二
大山 斉	永淵 敬二
関口 隆	堀 喬
古川 政春	関川 晃
中野 康二	佐々木 光憲
阿部 知二	小野 信幸
中田 保之	井原 肇