着眼点

ⅰ　数学Ａの平面幾何（図形の性質）と数学Ⅰの三角比（図形の計量）を融合したものであり，日頃扱っていないもの

ⅱ　シムソンの定理（定理２）の拡張を試みる問題を構成。２つの定理を含む命題を構成し，真偽を考えることで，定理の一般化を探究するもの

ⅲ　問題作成のために以下の図書を参考にしたが，定理の一般化では，証明の精査が必要となる。⑵での相似対象を直角三角形に変更したことで，一般化が示せる。一般化の探究はそういった定理の証明自体の本質も理解しなくてはいけない。

余談ですが，参考図書の２冊にも，融合した定理の記載がありません。

《参考図書》

清宮　俊雄，改訂版「幾何学一発見的研究法一」，モノグラフ，科学振興新社

矢野健太郎，「幾何の有名な定理」，数学ワンポイント双書，36，共立出版

解答例

⑴　外心をＯとし，直線OPと外接円Ｏとの交点をS，Ｔとおくと（Ｓは O に対してＰと同じ側），点ＰがＯの内側のときも外側のときも，

$$\mathrm{SP}=|R-r|,\quad \mathrm{PT}=R+r$$

と表せる。このとき，方べきの定理より

$$\mathrm{AP}\times\mathrm{PQ}=\mathrm{SP}\times\mathrm{PT}=|R-r|\cdot(R+r)=|R^2-r^2|$$

⑵　△DEKと△PCLにおいて，条件より

$$\angle\mathrm{DKE}=\angle\mathrm{PLC}=90^\circ\quad\cdots①$$

また，条件より ∠PEA＝∠PDCより，四角形PECDは円に内接する四角形ゆえ，

$$\angle\mathrm{PED}=\angle\mathrm{PCD}\quad\cdots②$$

同様にして，四角形PFAEも円に内接る四角形ゆえ，

$$\angle\mathrm{FEP}=\angle\mathrm{BAQ}\quad\cdots③$$

一方，外接円における $\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$ の円周角より

$$\angle\mathrm{BAQ}=\angle\mathrm{DCQ}\quad\cdots④$$

③，④より

$$\angle\mathrm{FEP}=\angle\mathrm{LCD}\quad\cdots⑤$$

②＋⑤より

$$\angle\mathrm{PED}+\angle\mathrm{FEP}=\angle\mathrm{PCD}+\angle\mathrm{LCD}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{KED}=\angle\mathrm{LCP}\quad\cdots⑥$$

①，⑥より，対応する２つの角が等しいので，　△DEK∽△PCL

次に，相似比については， PE⊥CAであるので，PCは四角形PECDの外接円の直径となる。

したがって，△DECにおいて正弦定理より

$$\frac{\mathrm{DE}}{\sin C}=\mathrm{PC}\qquad \text{ゆえに，}\ \mathrm{DE}:\mathrm{PC}=\sin C:1$$

(3)　外接円の $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ における円周角より

$$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{PQC}$$

よって， $\mathrm{PQ}\sin B=\mathrm{PL}$ であり，(2)より $\mathrm{DK}:\mathrm{PL}=\sin C:1$ から，

$$\mathrm{DK}=\mathrm{PL}\sin C=\mathrm{PQ}\sin B\sin C$$

一方，(2)の後半と同様に四角形 AFPE において，

$$\mathrm{FE}:\mathrm{AP}=\sin A:1\qquad \text{ゆえに，}\ \mathrm{FE}=\mathrm{AP}\sin A$$

以上より，△DEF の面積 S は，

$$S=\mathrm{FE}\times\mathrm{DK}\times\frac{1}{2}=\mathrm{AP}\sin A\times\mathrm{PQ}\sin B\sin C\times\frac{1}{2}$$

ゆえに，(1)より　$S=\dfrac{1}{2}|R^2-r^2|\sin A\sin B\sin C$

(4)　円 O′ を円 O に近づけるとき，線分 FE の長さは 0 でないある値に近づいていくが，線分 DK の長さは 0 に近づいていく。

つまり，円 O′ を円 O に近づけるとき，△DEK は線分 FE に近づく。

(5)　同じ向きで等しい角を 90° とすれば，定理 2 と同じものとなっている。

(6)　△ABC の外心を中心とする円 O′ の円周上の点 P から 3 直線 BC，CA，AB と同じ向きで等しい角（ θ とする）をなす直線との交点をそれぞれ D，E，F とする。このとき，△DEF の面積は点 P の位置によらず一定である。

(7)　真である。

解答(1)～(3)において，(1)と，(2)の前半である相似，(2)に登場する 2 つの四角形が円に内接することは，この条件においても成立する。

(2)の後半での，四角形 PECD における△EPC と△DEC において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{PC}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{DE}}{\sin C}\qquad \text{ゆえに，}\ \mathrm{DE}=\frac{\mathrm{PC}}{\sin\theta}\cdot\sin C$$

同様に，四角形AFPE において考えると

$$\mathrm{FE}=\frac{\mathrm{AP}}{\sin\theta}\cdot\sin A$$

以上より，△DEF の面積 S は，

$$S=\mathrm{EF}\times\mathrm{DK}\times\frac{1}{2}=\frac{|R^2-r^2|}{2\sin^2\theta}\sin A\sin B\sin C$$