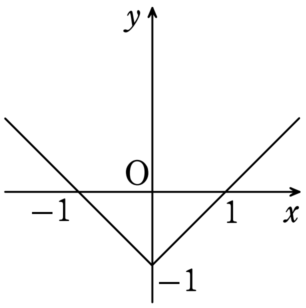
着眼点

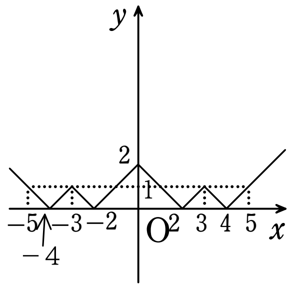
ⅰ　この問題は，絶対値による折り返しと，値によるグラフの形状の相違性，２変数の平方完成とそれによる最小値の評価２種が楽しめるもの。

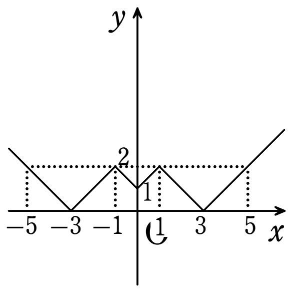
ⅱ　一般に a ，b を正の定数とするときの $S(a，b)$ の最小値は(6)の場合のときとなっている。

解答例

(1)　$y=|x|-1$　　　$y=|||x|-3|-1|$　　　$y=|||x|-1|-2|$







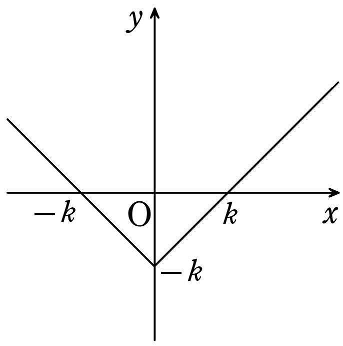
(2)　条件より，$y=|x|-k$ $(k>0)$ のグラフは右の通り。

$y=|x|-k$ と x 軸とで囲まれた図形は，直角二等辺三角形であり，底辺を x 軸にとると底辺の長さは $2k$，高さは図より k であることから，面積は，

$$2k\cdot k\cdot\frac{1}{2}=k^2$$

したがって，$k^2=4$

$k>0$ であるから　$k=2$

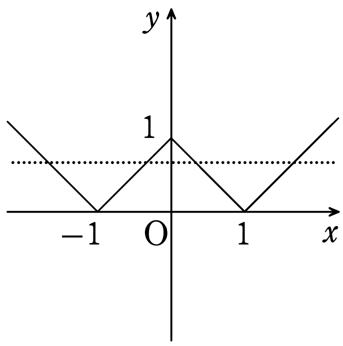


(3)　$y=||x|-1|$ のグラフは右の通り。

$a\geqq 1$ では $S(a)$ が単調増加であることは図よりわかるので，$0\leqq a\leqq 1$ の場合を考えればよい。

(2)より下三角（$-a-1\leqq x\leqq a-1$，$-a+1\leqq x\leqq a+1$ にある直角二等辺三角形）は高さ a，底辺 $2a$ である。

また，上三角（$a-1\leqq x\leqq -a+1$ にある直角二等辺三角形）は高さ $1-a$，底辺 $2(1-a)$ である。



以上より，$S(a)$ は，

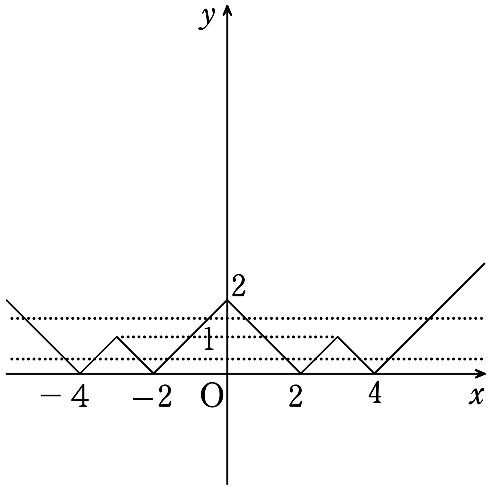
$$S(a)=\left(a\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\right)\times 2+(1-a)\cdot 2(1-a)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2a^2+(1-a)^2$$

$$=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。

(4)　$y=|||x|-3|-1|$ のグラフは右の通り。



$b\geqq 2$ では $S(b)$ が単調増加であることは図よりわかるので，$0\leqq b\leqq 2$ の場合を考えればよい。

また，$1\leqq b\leqq 2$ のとき，

$$S(b)=(2-b)^2+\{b(2b+1)-1-b^2\}$$
$$=3b^2+2$$

より，このときも $S(b)$ は単調増加となる。

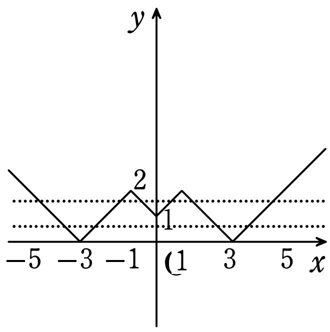
最後に，$0\leqq b\leqq 1$ のとき，(2)より大きい上三角 1 つの面積は $(2-b)^2$，小さい上三角 1 つの面積は $(b-1)^2$，下三角 1 つの面積は b^2 である。

したがって，$S(b)$ は，

$$S(b)=(2-b)^2+2(1-b)^2+4b^2$$
$$=7\left(b-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{26}{7}$$

よって，$S(b)$ は $b=\frac{4}{7}$ のとき最大値 $\frac{26}{7}$ をとる。

(5)　$y=|||x|-1|-2|$ のグラフは右の通り。



$b\geqq 2$ では $S(b)$ が単調増加であることは図よりわかるので，$0\leqq b\leqq 2$ の場合を考えればよい。

$1\leqq b\leqq 2$ のとき，$S(b)$ は，

$$S(b)=2(2-b)^2+2b^2+(b-1)^2$$
$$=5(b-1)^2+4$$

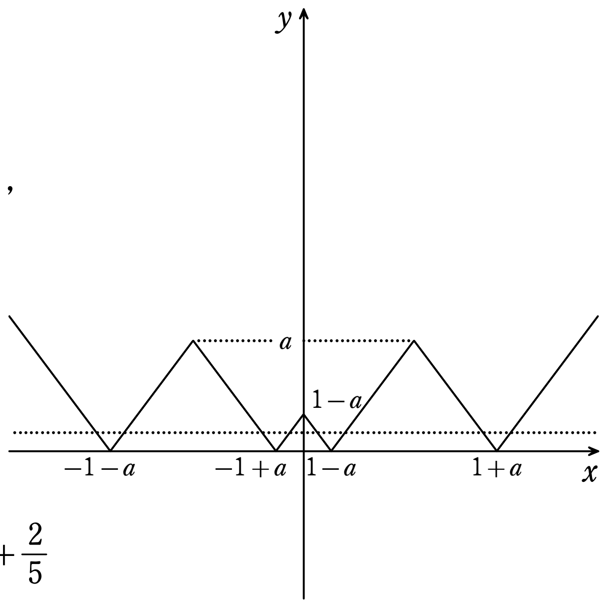
より単調増加であり，一方，$0\leqq b\leqq 1$ のとき，$S(b)$ は，(2)より大きい上三角 1 つの面積は $(2-b)^2$，小さい上三角 1 つの面積は $(1-b)^2$，下三角 1 つの面積は b^2 であるから，

$$S(b)=2b^2+(3-b)^2-2$$
$$=3(b-1)^2+4$$

より単調減少。

以上より，$S(b)$ は $b=1$ のとき最小値 4 をとる。

(6)　$y=|||x|-1|-a|$ のグラフは，a についての条件 $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ より右の通り。



b についての条件 $0\leqq b\leqq 1-a$ より，

(2)より大きい上三角 1 つの面積は $(a-b)^2$，小さい上三角 1 つは $(1-a-b)^2$，下三角 1 つの面積は b^2。

したがって，$S(a,\ b)$ は

$$
\begin{aligned}
&S(a,\ b)\\
&=2(a-b)^2+(1-a-b)^2+4b^2\\
&=7b^2-2(a+1)b+3a^2-2a+1\\
&=7\left(b-\frac{a+1}{7}\right)^2+\frac{20}{7}\left(a-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

これより

(a)　$\dfrac{a+1}{7}\leqq 1-a$ すなわち $\left(\dfrac{2}{5}<\right)\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき

$S(a,\ b)$ は $b=\dfrac{a+1}{7}$ かつ $a=\dfrac{1}{2}$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{14}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{7}$ をとる。

(b)　$\dfrac{a+1}{7}\geqq 1-a$ すなわち $\left(\dfrac{2}{3}<\right)\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 1$ のとき

$S(a,\ b)$ は $b=1-a$ のとき最小となる。

このとき，$S(a,\ b)$ は

$$
\begin{aligned}
S(a,\ b)&=S(a,\ 1-a)\\
&=2\{a-(1-a)\}^2+\{1-a-(1-a)\}^2+4(1-a)^2\\
&=12\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって，$S(a,\ b)$ は $a=\dfrac{3}{4}$ すなわち $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

(a)(b)より，$S(a,\ b)$ は $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{14}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{7}$ をとる。

注：ここでは「単調増加」という語句を用いたが，「増加関数」と同様にとらえてよい。すなわち，関数 $f(x)$ が「単調増加」であるとは，ある区間の任意の x_1，x_2 に対して，$x_1<x_2$ のとき $f(x_1)<f(x_2)$ であることをいう。（単調減少についても同様。）