$\boxed{\text{着眼点}}$

① 異なる整数なので，大小関係を入れる。例えば,「 a , b , c は異なる正の整数」は,
$1 \leqq a < b < c$ とする。整数問題の解法ではよく用いる考え方である。

② x , y が整数のとき， $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=k$ (k は整数)を満たすのは，x が 2 の倍数， y が 3 の倍数のときである。

③ x， y， z が整数のとき， $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{7}=k$ (k は整数)を満たすのは. x が 2 の倍数, y が 3 の倍数， z が 7 の倍数のときである。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1) a， b は異なる正の整数なので $1 \leqq a < b$ ，同様に $1 \leqq d < e$ とする。

このとき， $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{d+e}{3} \geqq \dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2}{3}=\dfrac{5}{2}>2$

よって， $p=1$，2 を満たす a , b , d , e は存在しない

(2) $p=4$ のとき，①は $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{d+e}{3}=4$……③

③の両辺に 2 をかけると， $a+b+\dfrac{2(d+e)}{3}=8$……④

左辺が整数となるためには， $d+e$ が 3 の倍数とならなけらばならない。

$d+e=3$のとき， $(d,\ e)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

このとき，③は $\dfrac{a+b}{2}+1=4$ より $a+b=6$ となるので,

$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1),\ (4,\ 2)$

$d+e=6$ のとき， $(d,\ e)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$

このとき，③は $\dfrac{a+b}{2}+2=4$ より $a+b=4$ となるので

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

$d+e$ が 9 以上の 3 の倍数のとき，④より $a+b=8-\dfrac{2(d+e)}{3} \leqq 8-\dfrac{2 \cdot 9}{3}=2$ となるので，異なる正の整数 a , bは存在しない。

よって，以上より

$a+b=6$, $d+e=3$ のとき， $(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1),\ (4,\ 2)$
$(d,\ e)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

$a+b=4$, $d+e=6$ のとき， $(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$
$(d,\ e)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$

(3) $1 \leqq a < b < c$ とすると， $\dfrac{a+b+c}{2} \geqq \dfrac{1+2+3}{2}=3$

同様に $1 \leqq d < e < f$ としたとき， $\dfrac{d+e+f}{3} \geqq \dfrac{1+2+3}{3}=2$

したがって，$\dfrac{a+b+c}{2}+\dfrac{d+e+f}{3}+\dfrac{g+h+i}{7}\geqq 2+3+\dfrac{g+h+i}{7}=5+\dfrac{g+h+i}{7}$

となるので，$1\leqq q\leqq 5$ のとき，②を満たす 正の整数 a，b，c，d，e，f，g，h，i は存在しない。

(4)　(3)の解答より，$\dfrac{a+b+c}{2}+\dfrac{d+e+f}{3}+\dfrac{g+h+i}{7}\geqq 5+\dfrac{g+h+i}{7}$

$$6\geqq 5+\frac{g+h+i}{7}$$

$$1\geqq \frac{g+h+i}{7}$$

ゆえに，$7\geqq g+h+i$

ここで，②の両辺に 6 をかけると，$3(a+b+c)+2(d+e+h)+\dfrac{6(g+h+i)}{7}=6q$

なので，$\dfrac{6(g+h+i)}{7}$ が整数となるためには，$g+h+i$ は 7 の倍数とならなければならない。

ゆえに，$7\geqq g+h+i$ より，$g+h+i=7$

$1\leqq g<h<i$ なら，$g=1$，$h=2$，$i=4$

$g+h+i=7$ のとき，$3(a+b+c)+2(d+e+f)=30$

$$3(a+b+c)+2(d+e+h)\geqq 3(1+2+3)+2(1+2+3)=30$$

となるので，$a+b+c=6$，$d+e+f=6$

$1\leqq a<b<c$ なら，$a=1$，$b=2$，$c=3$

$1\leqq d<e<f$ なら，$d=1$，$e=2$，$f=3$

よって，以上より

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

$(d,\ e,\ f)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

$(g,\ h,\ i)=(1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2),\ (2,\ 1,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 2),\ (4,\ 2,\ 1)$

(5)　(4)の解答より，$7\geqq 5+\dfrac{g+h+i}{7}$

$$14\geqq g+h+i$$

さらに，$g+h+i$ は 7 の倍数となるので，$g+h+i=7$，または $g+h+i=14$ である。

$g+h+i=7$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{2}+\dfrac{d+e+f}{3}=6$ ……④

④を満たすのは，$a+b+c$ が 2 の倍数，$d+e+f$ が 3 の倍数のときで，

$6\leqq a+b+c$，$6\leqq d+e+f$ なので

$a+b+c=6$，$d+e+f=9$　または　$a+b+c=8$，$d+e+f=6$

$g+h+i=7$ のとき，これを満たす 3 数は 1，2，4 であり，g，h，i の大小関係をなくすと順列になるので 6 通り。

このとき，$a+b+c=6$ を満たす 3 数は，1，2，4 で同様に 6 通り。

$d+e+f=9$ を満たす 3 数は，1，2，6 で同様に 6 通り，1，3，5 で同様に 6 通り，2，3，4 で同様に 6 通りあるから， $3\times6=18$ 通り。

ゆえに， $6\times6\times18=648$通り。

同様様に， $a+b+c=8$ を満たす 3 数は，1，2，5 で 6 通り，1，3，4 で 6 通りあるから，$2\times6=12$ 通り。

$d+e+f=6$ を満たす 3 数は，1，2，3で 6 通り。

ゆえに， $6\times12\times6=432$ 通り。

次に， $g+h+i=14$のとき， $a+b+c=6$， $d+e+f=6$

ここで， $g+h+i=14$を 満たすのは

g	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3
h	2	3	4	5	6	3	4	5	4	5
i	11	10	9	8	7	9	8	7	7	6

の 10 通りで，順列を考えると $6\times10=60$ 通り。

$a+b+c=6$ を満たす 3 数は，1，2，3 の 6 通り。

$d+e+f=6$ を満たす 3 数は，1，2，3 の 6 通り。

ゆえに， $60\times6\times6=2160$ 通り。

よって，以上より， $648+432+2160=3240$ 通り。