着眼点

数学の中に「充填（じゅうてん）問題」と呼ばれる問題があります。与えられた図形の中に大きさの決まった図形は何個入るかという問題です。

充填問題の中で最も知られているのが「10㎝×16㎝の長方形の中に半径1の円は何個入るか」という問題です。「縦に5個，横に8個入るので40個入る」というのが常識的な答えでしょうが，実は41個入ります。どのような入れ方をしたらよいのか考えてみてください。

今回は正方形の中に円を入れる問題ですが，円の半径を固定して，n個の半径1の円を入れるために必要な正方形の1辺の長さを求めるようにしました。実は，最小になることの証明は意外に難しく，どのような場合に最小の正方形になるか試行錯誤してモデルを作ることが必要になることもあります。今回は最小性の証明は求めず，詰め方のバリエーションを考えてもらおうという趣向です。ポイントは対称性をどう使うかです。半径1の円どうしが接する場合，中心間の距離が2になること，円と図形の辺が接するとき，接点と中心の距離が1であり，円の中心と接点を結ぶ線分が垂直になることがポイントです。

⑴の場合は9個入った正方形から1個除いたので，四隅以外の円を寄せて接するようにすると少し小さい正方形に内接できるようになります。この場合，中心を結んだ線分できれいな三角形，四角形ができるので比較的易しいのではないかと思います。

⑵は3個の円を入れる場合で，円を4個入れたときから⑴と同様に右上の円1個を取り除き，3つの円が互いに接しつつ，正方形の辺と接するようにした場合です。どの図形に着目するかでいろいろな考え方で解ける問題です。最初の解答では，隣り合う2辺の長さが等しい矩形（凧の形）の性質を用いて45°と135°三角比を用いたので数Ⅰの範囲で解けたのですが，数Ⅱで半角の公式を知っているとtan22.5°を求めて，それを用いても求められます。2年生であればsin15°やcos15°なども普通に使えますよね。1年生と2年生で有利不利が生じないようにヒントのつもりで付け加えました。使わなくても計算できます。

⑶　5個の場合はいろいろな場合が考えられます。例えば，中央に1個，周りに4個の円を配置した場合（図５），3つの円が正方形に接したまま2つの円が互いに接しつつ正方形とも接している場合（図６）など。それ以外の場合も考えて，どの場合が最も小さい正方形になるかを考えるとこの1問を解決するのに何時間もかかってしまいそうです。実際にいろいろな場合を考えてモデルを作ってみることが大切です。これは数学だけでなく，これからいろいろな分野の問題を考えるときにも必要になる考え方だと思います。

図５の場合は斜めの対角線の長さを考えれば⑴⑵より易しいかも。図６の場合は台形の処理の仕方に工夫が必要ですが、図形自体は三角比と三平方の定理で処理できるので，数学コンテストの問題としては易しい方ではないでしょうか。皆さんの答案を楽しみにしています。

なお，この問題は「円をめぐる冒険」ポザマンティエ＆ゲレトシュレーガー―　紀伊国屋書店（2020）の問題を参考にしました。興味を持たれた方は調べてみてください。

解答例

(1)　図３では図は左右対称、上下対称、対角線に対しても対称である。それぞれ隣り合う円の中心を結んでみよう（図３①）。正方形の中の隣り合う円は互いに接しているので，円の中心どうしを結ぶと中心間の距離は２である。点 O，A，B，C は外側の正方形の頂点であり，点 D，E，F，G，H，I，J，K は接する円の中心とする。

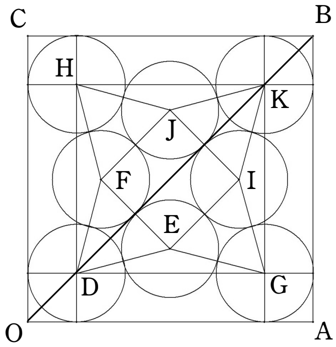


図３①

四角形 DGKH は正方形であり，△DEF，△GIE，△KJI，△HFJ は１辺の長さが　２の正三角形である。また，対角線 OB は辺 EF 及び IJ と直交しているので，EF と IJ は平行で長さが等しい。よって，四角形 EFJI は１辺の長さ２の正方形である。

図３において，接している３つの円の中心を結んでできる三角形は正三角形であり，中央にできる四角形は正方形になる。また，外の正方形の点 O と点 B を結ぶ対角線は点 D と点 K の２つの円の中心を通り，中央の円の接点２か所を通っている。対角線上にある円の接点を図のように L，M とすると，$\mathrm{OD}=\sqrt{2}$，△DEL は３つの内角が 30°，60°，90° の直角三角形より $\mathrm{DL}=\sqrt{3}$，正方形 EIJF は１辺の長さ２より $\mathrm{LM}=2$，△KIM は△DEL と同様に $\mathrm{MK}=\sqrt{3}$，OD と同様に $\mathrm{KB}=\sqrt{2}$ より，正方形OABC の対角線 OB の長さは $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2$。

よって，正方形の一辺の長さは $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{6}+\sqrt{2}$

別解　△DEGは $\mathrm{ED}=\mathrm{EG}=2$。$\mathrm{ED}=\mathrm{EG}=2$　$\angle\mathrm{EDG}=15°$ を用いると

$$\mathrm{OA}=1+2\cdot\cos 15°\cdot 2+1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot 4+2=2+\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

補足　△DEG は二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{DEG}=150°$ となり，DG の長さは余弦定理を用いても求められる。

(2)　図４の場合，図形は正方形の対角線について対称であり，点 O，A，B，C は正方形の頂点であり，点 D，E，F は円の中心である。点 D が中心の円は正方形と２辺で接していて，点 E，点 F が中心の円は正方形と１辺で接している。

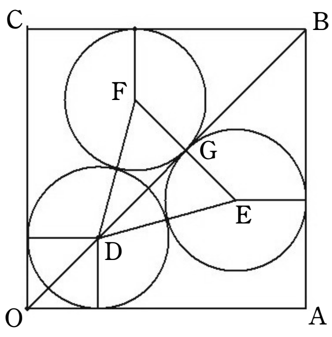
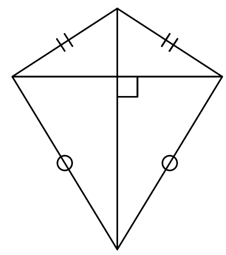


図４①

正方形の対角線は点 D とそれ以外の２つの円の接点を通っている。対角線 OB の長さが分かると１辺の長さも求められる。(1)と同様に $\mathrm{OD}=\sqrt{2}$，△DEF は１辺の長さ２の正三角形であり，辺 EF は OB と直交しているので，EF と対角線の交点を G とすると $\mathrm{DG}=\sqrt{3}$。

ここで，四角形 BGEH は $\mathrm{GE}=\mathrm{EH}$ かつ $\mathrm{BG}=\mathrm{BH}$（円に外部の点から引いた接線の長さは等しい）より凧形（凧の形）である。ここで，$\angle\mathrm{BGE}=\angle\mathrm{BHE}=90$，

$\angle\mathrm{GBH}=45^\circ$ より $\angle\mathrm{GEH}=135^\circ$ 。



$\triangle\mathrm{EDH}$ について余弦定理より

$$\mathrm{GH}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos135^\circ=2+\sqrt{2}$$ 。

$\triangle\mathrm{BHG}$ について $\mathrm{BG}=\mathrm{BH}=x$ とおくと，余弦定理より

$\mathrm{GH}^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos45^\circ=x^2(2-\sqrt{2})$ より

$$x^2(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$$

$$x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}$$

$x>0$ より　　$x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

よって，　$\mathrm{GB}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

ゆえに，正方形の１辺の長さは

$$\frac{\mathrm{OB}}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}=2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

別解　$\triangle\mathrm{BGE}$ は $\mathrm{GE}=1$，$\angle\mathrm{BEG}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EBG}=22.5^\circ$ であり，$\tan22.5^\circ=\sqrt{2}-1$ を用いると，

$$\frac{1}{\mathrm{BG}}=\tan22.5^\circ \text{ より}\quad \mathrm{BG}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

よって，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$

正方形の１辺の長さは　$\dfrac{\mathrm{OB}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=2+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(3)　図５の場合，上下，左右及び対角線に関して対称。点O，A，B，Cは正方形の頂点，点D，E，F，G，Hは円の中心とする。点D，E，H，Gを中心とする円は正方形と２辺で接し，点Fを中心とする円は他の４つの円と接している（図５）。正方形の対角線OBは点D，F，Hを通る。

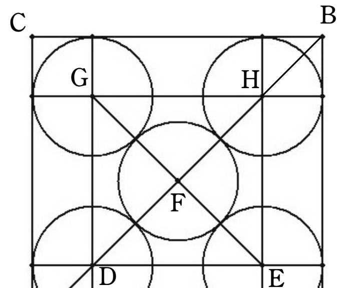


図５

対角線 $\mathrm{OB}=\mathrm{OD}+\mathrm{DH}+\mathrm{HB}=2\sqrt{2}+4$ より，正方形の１辺の長さは　$\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}$

図６の場合，対角線OBに関して対称。点O，A，B，Cが正方形の頂点，点D，E，F，G，Hが円の中心。

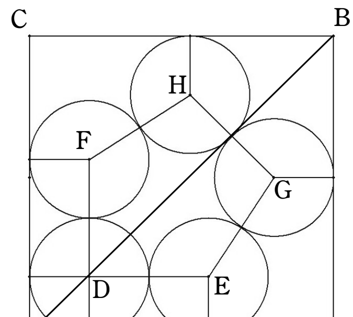


図６①

点Dが中心の円は２つの円と正方形の２辺で接し，それ以外の円は２つの円と正方形の１つの辺で接している（図６①）。対角線OBは点D及び点Gを中心とする円と点Hを中心とする円の接点を通っている。$\mathrm{OD}=\sqrt{2}$ ，$\triangle\mathrm{DEF}$は $\mathrm{DE}=\mathrm{DF}=2$ ，$\angle\mathrm{EDF}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であり，$\mathrm{DI}=\sqrt{2}$ 。また，四角形FEGHはFEとHGがともにOBと直交するの

で，HG と FE が平行な台形であり， $EF=2\sqrt{2}$ ，$HG=HF=GE=2$ の等脚台形である。点 G から辺 FE におろした垂線との交点を K とすると， $GK^2+KE^2=GE^2$ より $GK^2=2^2-(\sqrt{2}-1)^2=2\sqrt{2}+1$ 。

よって， $GK=\sqrt{2\sqrt{2}+1}$ 。

また，四角形 BJGL は凧形より，(2)と同様に $GK=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 。

したがって，対角線 $OB=2\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}+1}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 。

正方形の 1 辺の長さは　$3+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2}$