$\boxed{\text{配点}}$

⑴⑵　各 10 点　　⑶　タイプ１，タイプ２　各 10 点

$\boxed{\text{講評}}$

問題文中にある $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ や $\tan 22.5° = \sqrt{2}-1$ などは使わなくても解けます。数Ⅱ「三角関数」で「半角の公式」を学ぶと自力でも出せる値なのですが，１年生と２年生で有利不利が生じないように付け加えました。

問題１は平面図形の問題ですが，着眼点にも書いたように，１つの図形の中に決められた大きさの図形を重ならないようにいくつ入れられるかという「充填問題（この場合，複数の図形が１点のみを共有する場合＝接する場合は重なっていないと考えます）」です。この問題は，円と直線の位置関係や，三角形，四角形など図形の性質と，三平方の定理，基本的な三角形の角と辺の関係などを知っていれば中学生でも手のつけられる問題と考えて出題しました。とはいえ，図形に不慣れな人にとってはどのように考えたらよいのか困ってしまうかもしれません。そのため，例として最初に９個の半径１の円を正方形に入れる問題を説明しました。答えは縦に３個，横に３個の円を並べると９個の円が１辺の長さ６の正方形の中にちょうど入ります（図１）。これより小さい正方形に９個の円を入れることはできません（ただし，これを証明するとなれば悩んでしまいそうですが）。

それでは８個の円を入れるにはどうするかということで，最初の９つの円のうち真ん中の１つを除いて，８つの円を含む正方形（図２）を考えるとしました。もちろん最初の1辺の長さ６の正方形には９個の円が入れられるので，８個であればそれより小さい正方形にも入れられるのではないかということです。四隅の円は外側の正方形の２辺に接したまま，内側の４円を真ん中に寄せ，互いに２つずつ接するようにし，それに合わせて外側の正方形の上下と左右を縮めると図３の形になります。出題者は，ここで正方形の内部にある円の中心が左右対称，上下対称，さらに対角線について対称という条件が浮かべば見通しが立つと考えました。今回の設問はいずれも最低１つの対角線に関して対称な場合です。一般には対称でない場合も考えなければならないのですが，今回の出題では扱っていません。

当初，この問題は，どのような場合に決められた個数の円を内部に含む最小の辺の長さを持つ正方形が作られるかを考えて，フリーハンドで描いてもらう問題として発想しました。ところが，この出題だと，皆さんがどのような解答をするのか予想が難しく，また，採点も大変なので，いくつかの例をあげてそれぞれの場合の正方形の大きさを求めてもらう出題にしました。それぞれの正方形について，図と計算・説明で６点，辺の長さを正しく求めて４点としています。今回は，正方形の中にすでに円が入っているので，作図とはいっても点と点を結ぶ，点から辺に垂線を引くなどですが，特に指示はしていないのでフリーハンドでＯＫです。⑶の前半は点から引いた垂線と中心と中心を結ぶ線分をとり，角度，辺の長さなどを図の中にかきこむだけで十分な説明になっていると考えられた答案もありました。

一方，答えしか書かずに減点されている人，答えが正しくても説明不十分で減点されている人もいます。また，途中までで完成していなくても，そのやり方で正解に到達できる場合や計算ミスなどで答えが違っていても部分点を上げている場合もあります。今回，問題1での40点満点は2人だけだったのですが，説明不十分として減点されている人の中には，図形を正しく把握しているのに説明が一言足りなくて満点を逃した人も相当数います。記述式の問題の場合，採点者や出題する団体の考え方によって採点基準も変わることがありますが，皆さんはできるだけ丁寧に説明や計算などを書いてほしいと思います。

それでは(1)です。10点満点中，平均点は6.8点，満点は25名でした。正しく辺の長さを導いていたのは全受験者の64.5%でした。解答例では，外側の正方形について対角線OBについての対称性を用いて図３①に補助線を描きこみ，四隅のOD，AG，BK，CHを対角線とする四角形は，円と接線の関係より1辺の長さが1の正方形となること，円の中心どうしを結んでできる三角形のうち，図の△DEF，△GIE，△KIJ，△HJFなどは3辺の長さが2で等しいので正三角形であることは説明なしで使ってもよしとしました。また，四角形DGKHは4辺の長さが等しいこと（元の正方形から長さ2を引いたもの），さらに，4つの内角が等しいことから正方形であることは説明なしでよしとしました。しかし，四角形FEIJは4辺の長さが等しいことだけでは正方形とはいえません（4辺の長さが等しいのはひし形です）。4辺の長さが等しいことに加え，4つの内角がすべて直角であることをいわなければ説明不十分です。解答例では2つの円が接するとき中心を結ぶ線分は接線と直交するため，外側の正方形OABCの対角線OBと辺EF，辺IJは直交するので，隣り合う2角が90°で向かい合う2辺の長さが等しい四角形は長方形となり，2つの長方形を合わせた四角形EIJFは正方形となるという説明をしていますが，採点してみると4辺の長さが等しいので正方形である，とした答案が非常に多く，減点 −1 としました。三角形の場合は，3辺の長さが等しいことと3つの内角の大きさが等しいことは必要十分条件であり，どちらの条件でも正三角形になりますが，四角形の場合は4辺の長さが等しいことと同値（必要十分条件）なのはひし形であることであり，４つの内角の大きさが等しいことと同値なのは長方形であることです。図を見ると直角であることは明らかであると言いたくなるかもしれませんが，直角に見えることと直角であることは違います。対角線OBについて点Iを中心とする円と点Jを中心する円，点Eを中心とする円と点Fを中心とする円は対称なので，「対称性より ∠IJK と ∠JIE は90°」などと説明した答案はOKとしました。ただし，より厳密には，ただ対称だからでは不十分で，正方形の対角線について対称としてほしいところです。別解としては，対角線を使わずに中の正方形DGKHの辺の長さを求め，それに +2 とした答案も多かったです。この場合も，二等辺三角形 △DEGの底辺DGを求めるのに，4辺の長さが等しいので四角形FEIJが正方形であるとした人は減点しています。∠FEI＝90°であれば
$\angle \mathrm{DEG}=360^\circ-60^\circ\times 2-90^\circ=150^\circ$ で余弦定理からDGを導けますし，△DEGが二等辺三角形より，点Eから辺DGに垂線ELを引くと $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を用いてDGを求められます。

⑵は 10 点満点中，平均点は 5.6 点，満点は 59 名でした。正しく辺の長さを導いていたのは全受験者の 59.1% でした。外側の正方形の頂点を O，A，B，C とし，辺 OA と OC に接する円の中心を D，この円と辺 AB に接する円の中心を E，点 D が中心の円と辺 BC に接する円の中心を F とします。この場合，３つの円は左右対称でも上下対称でもありませんが，対角線 OB に関して対称になっています。解答例では，外側の正方形 OABC の対角線 OB の長さを求め，直角二等辺三角形の辺の比 $1:1:\sqrt{2}$ を用いて正方形の２辺に接する円の中心は対角線 OB 上にあり，正方形の１辺に接する２つの円は中心が正方形の対角線に関して対称の位置にあることを用いて２円の接線は対角線 OB と一致することより，△DEF は正方形で，FE の中点を G とすると DG＝$\sqrt{3}$ （３つの内角が 30°，60°，90° の直角三角形である）。四角形 EHBG は EG＝EH＝1 （円の半径），BH＝BG （円の外部の点から円に引いた接線の長さは等しい）より，四角形 BGEH は矩形（凧の形）であることがわかります。さらに，対角線と正方形の一辺のなす角 45° で ∠BGE＝∠BHE＝90° なので ∠GEH＝135° より余弦定理で GH を求め，さらに BH を求める方法（図４①）を用いました。

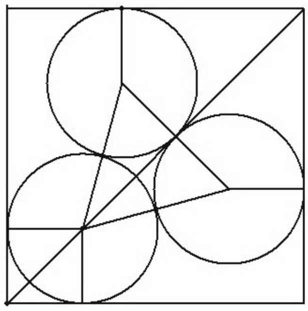

図４①

しかし，実際に採点すると，この方法を使った受験生は少なく，点 D を通り辺 OA に平行な直線 GI，同じく点 D を通り辺 OC に平行な直線 JL を引き，点 F から直線 JL に垂線 FK を引き，∠LDI＝90°，∠FDE＝60° から ∠EDH＝15° として，△EDHで

$\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を用いて DH を求め，DH＋2 で OA の長さを求めた人の方が多かったです。ただし，この場合も ∠LDH＝90°，∠FDE＝60° より説明抜きで ∠EDH＝15° とした人が多く，⑴と同じように減点せざるを得ない答案が多かったです。

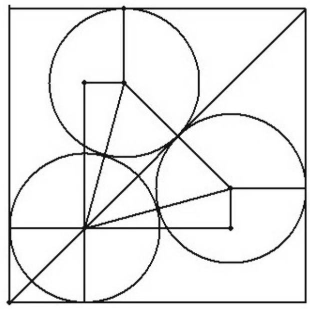

図４②

対称性を用いるか，合同条件で ∠FDK＝∠EDH を示すか，正方形の辺と対角線のなす角は 45° であるかを用いて説明（図４②）してあればＯＫです。図４②の変形で対角線を使った解法が図４③です。外側の正方形の４点を O，A，B，C，内部の円の中心を図４①，②と同様に点 D，E，F とします。点 D を通り外側の正方形の２辺 OA，OC に平行な直線を引き，同様に点 F を通り OA，CB に平行な直線，点 Eを通り AB，OC に平行な直線を引くと，正方形の内部に，各辺が外側の正方形の各辺と平行で，辺の長さが元の正方形の一辺の長さより２短い正方形 DGLH ができます。ここで，外の正方形の対角線と中の正方形の対角線が重なっていて，内部の点 E が中心の円と点 F が中心の円の接点を N とすれば，外側の正方形の対角線 OB は

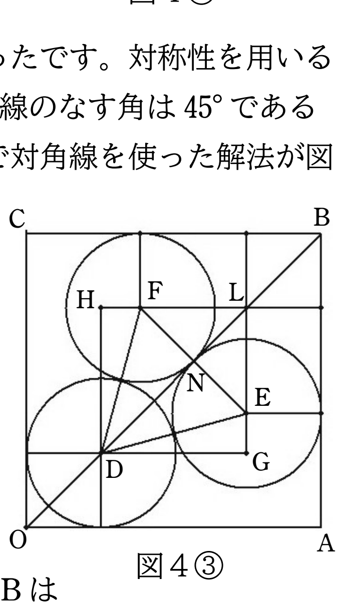

図４③

OD＝$\sqrt{2}$，DN＝$\sqrt{3}$，△FLEは直角二等辺三角形で FN＝NE＝1 より NL＝1，△BLP は直角二等辺三角形であることより LB＝$\sqrt{2}$ より

対角線 $\mathrm{OB}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}$ より $\mathrm{OA}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=2+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ となります。

⑶はタイプ１，タイプ２ともに10点の配点です。タイプ１の平均点は6.7点，満点は106名。答えが正しかったのは69.1%でした。また，タイプ２の平均点は1.7点，満点は10名。答えが正しかったのは7.6%でした。問題文中の図を見てタイプ１とタイプ２ではタイプ１の方が小さいことは予測できると思います。

タイプ１は⑴⑵を使わずに求められますし，中の正方形と補助線として対角線を用いれば計算量も少なく，この４つの図形の中でも一番答えは求めやすいような気がします。以前，数学コンテストの出題について，「⑴⑵などと枝問が設定されているときは前の設問が次の枝問へのヒントになっていることがありますよ」と『採点を終えて』の中で書いたことがあります。一般的には，枝問が進むにつれて問題の難易度が高くなることが多いのですが，今回は円の個数が変わっていますし，タイプ１の場合，５つの円の中心がすべて正方形の対角線上にあるので条件が少なく，⑶のタイプ１がこの４つの図形の中で一番計算が楽なケースでした。受験生の中には，⑴⑵で行き詰まって⑶に手をつけずに，問題２以降に進んだ人もいたのではないでしょうか。もったいないなと感じました。

タイプ２（図６）は，正方形の左下から右上に対角線を引くと，左下の円は中心が対角線上にあり，残りの４つの円はこの対角線に関して互いに対称な位置にあります。解答例では左下の正方形，次に直角二等辺三角形，さらに等脚台形，そして凧形の四角形ができるので，これらを用いて正方形の対角線の長さを求めます。別解として，凧形の四角形を使わずに45°の半分である22.5°の直角三角形で $\tan 22.5°=\sqrt{2}-1$ （解答例⑵の別解の形）を使った人もいました。出題者が予想もしなかった方法で⑶を解決したのが，受験番号190の坂本くん（途中まで同じ方法で考えていたのが２名）でした。⑵の別解と似た方法ですが，外側の正方形の１辺の長さを a として正方形の内部の５つの円の中心を通る正方形を作り，この正方形を DIJKとして△EIFについての三平方の定理を用いて a の値を求めるという方法です。この方式だと直角二等辺三角形の辺の比と三平方の定理だけで解けるので（計算量は多いですが）すっきりとしています。

今回の問題１は８個，３個，５個の円を含む正方形の問題でしたが，実は個数を変えると対称でないような正方形が条件を満たす場合もあります（前出の「円をめぐる冒険」参照）。図形問題はホントに奥が深いです。

（立命館慶祥中学校・高等学校　佐々木　光憲）