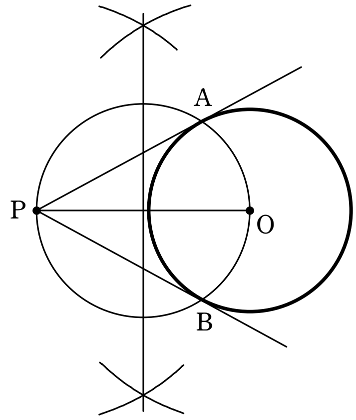
解答例

(1)（作図の手順）

①線分 PO を直径とする円をかき，その円と円 O との交点を A，B とする。

②直線 PA，PB をかく。



(2)　（作図の手順）

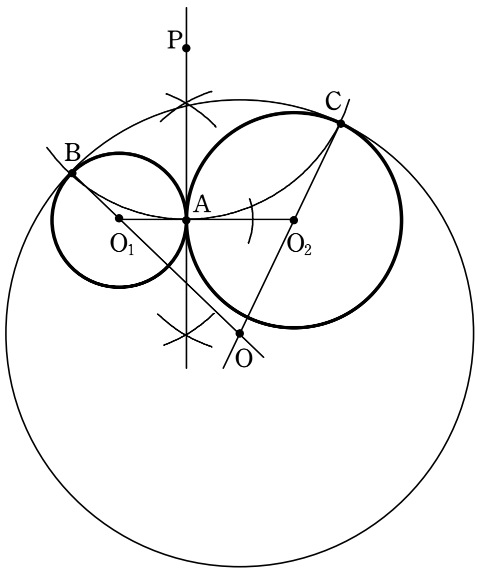
① 2 円 O_1，O_2 の接点を A とし，A を通る 2 円の共通接線をかく。

②① の共通接線上に，A 以外の点 P を取る。

③中心が P で半径が PA の円と，2 円 O_1，O_2 との交点をそれぞれ B, C とする。

④直線 BO_1，CO_2 の交点を O とする。

⑤中心が O で半径が BO（＝CO）の円をかく。



(3)　∠ABC の大きさで場合分けし，AD⊥OA を示す。

[1]　0°＜∠ABC＜90° のとき

円 O について，円周角の定理により∠AOC＝2∠ABC であり，△AOC は OA＝OC の二等辺三角形であるから，

$$\angle CAO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC \quad \cdots\cdots ①$$

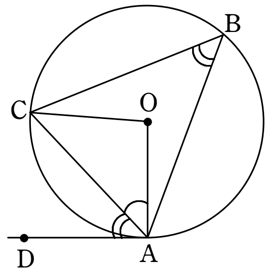
仮定より，∠DAC＝∠ABC であるから，① と併せて，

$$\begin{aligned}\angle DAO &= \angle DAC + \angle CAO \\ &= \angle DAC + (90^\circ - \angle ABC) \\ &= \angle DAC + (90^\circ - \angle DAC) = 90^\circ\end{aligned}$$

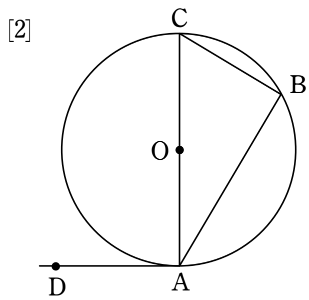
つまり，AD⊥OA が成り立つ。

よって，直線 AD は円 O の接線である。

[1]



[2]　$\angle ABC = 90^\circ$ のとき



円周角の定理により，$\angle AOC = 2\angle ABC = 180^\circ$ であるから，辺 AC は円 O の直径であり，仮定により

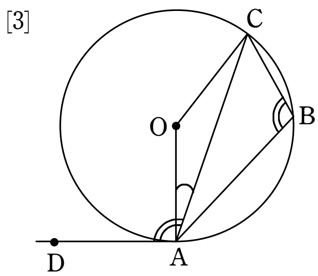
$$\angle DAC = \angle ABC = 90^\circ$$

である。

つまり，$AD \perp OA$ が成り立つ。

よって，直線 AD は円 O の接線である。

[3]　$90^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ のとき



円 O について，円周角の定理により，

$\angle AOC = 360^\circ - 2\angle ABC$ であり，$\triangle AOC$ は $OA = OC$ の二等辺三角形であるから，

$$\angle CAO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \angle ABC - 90^\circ \quad \cdots\cdots ②$$

仮定より，$\angle DAC = \angle ABC$ であるから，② と併せて，

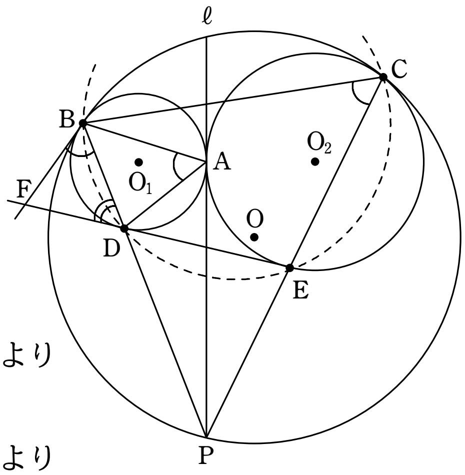
$$\begin{aligned} \angle DAO &= \angle DAC - \angle CAO \\ &= \angle DAC - (\angle ABC - 90^\circ) \\ &= \angle DAC - (\angle DAC - 90^\circ) = 90^\circ \end{aligned}$$

つまり，$AD \perp OA$ が成り立つ。

よって，直線 AD は円 O の接線である。

[1] ～ [3] により，題意は示された。■

(4)　条件の対称性により，直線 DE が円 O_1，O_2 の共通接線であることを示すためには，円 O_1 の接線であることを示せば十分。



以下，直線 DE が円 O_1 の接線であることを示す。

直線 DE と，2 円 O，O_1 の共通接線との交点を F とする。

直線 BF は 2 円 O，O_1 の共通接線であるので

$$\angle DBF = \angle DAB \quad \cdots\cdots ①$$

$$\angle DBF = \angle ECB \quad \cdots\cdots ②$$

円 O_1 と直線 PB，PA について，方べきの定理により

$$PD \cdot PB = PA^2 \quad \cdots\cdots ③$$

円 O_2 と直線 PE，PA について，方べきの定理により

$$PE \cdot PC = PA^2 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ により $PD \cdot PB = PE \cdot PC$ が成り立つから，方べきの定理の逆により，4 点 B，D，E，C は一つの円周上にある。

すなわち，四角形 BDEC は円に内接するので

$$\angle FDB = \angle ECB \quad \cdots\cdots ⑤$$

①，②，⑤ により $\angle FDB = \angle DAB$ が成り立つ。

よって，(3) の命題により，直線 DE は円 O_1 の接線である。■