着眼点

前半はピックの定理「単連結である格子多角形の内部，境界にある格子点を数えることで面積が求められる」の証明の一部が使われています。

後半はスコットの定理という格子多面体が凸であるための必要十分条件が背景にあり，(5)での n の範囲は，凸である条件として登場するものです。直角三角形に限定すると，一部しか存在しないことがわかります。

(5)は2つの平方和を考えることになり，整数の問題となっています。ちなみに，2つの平方和の素因数は2か，4で割った余りが1となる素数のみであることが知られているので，3，7，9がありえないことはそこでもわかります。

参考図書

Paul R. Scott, On convex lattice polygons, Bull. of the Austral. Math. Soc. 15 (1976), 395−399.

日比　孝之，多角形と多面体−図形が織りなす不思議世界−，ブルーバックス，B2153，講談社

解答例

(1)　条件より，$I(R)=(a-1)(b-1)$，$B(R)=2(a-1+b-1)+4=2a+2b$，$S(R)=ab$，

これより，$I(R)+\dfrac{1}{2}B(R)=(a-1)(b-1)+\dfrac{1}{2}(2a+2b)=ab-a-b+1+a+b$

$$=ab+1=S(R)+1$$

したがって，$S(R)=I(R)+\dfrac{1}{2}B(R)-1$。

(2)　T を直角三角形OABとする。

線分AB上の格子点の個数を d とすると，端点を除く線分AB上の格子点の個数は $d-2$。このとき，図形の対称性より，

$$I(T)=\frac{(a-1)(b-1)-(d-2)}{2}=\frac{ab-a-b-d+3}{2}$$

また，(1)より，

$$B(T)=a+b+1+d-2=a+b+d-1$$

一方，$S(R)=\dfrac{ab}{2}$。

よって，

$$I(R)+\frac{1}{2}B(R)-1=\frac{ab-a-b-d+3}{2}+\frac{1}{2}(a+b+d-1)-1$$

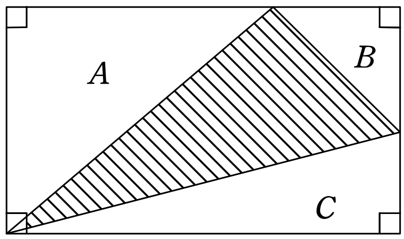
$$=\frac{ab}{2}=S(T)$$

ゆえに，直角三角形OABは性質Pを満たす。

(3)　格子直角三角形 X は(2)の場合と，下図のように，長方形（Y とする）を x 軸，y 軸とそれぞれ平行な辺を持つ高々3個（A，B，C）の直角三角形を切り取ることで表

される。

長方形 Y



このとき，

$$S(X)=S(Y)-S(A)-S(B)-S(C)$$
$$B(X)=B(A)+B(B)+B(C)-B(Y)$$
$$I(X)=I(Y)-I(A)-I(B)-I(C)-\{B(X)-3\}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&I(X)+\frac{1}{2}B(X)-1-S(X)\\
&=\left\{S(A)-I(A)-\frac{1}{2}B(A)+1\right\}+\left\{S(B)-I(B)-\frac{1}{2}B(B)+1\right\}\\
&\quad+\left\{S(C)-I(C)-\frac{1}{2}B(C)+1\right\}+\left\{I(Y)+\frac{1}{2}B(Y)-1-S(Y)\right\}\\
&\quad+B(Y)-B(A)-B(B)-B(C)+B(X)\\
&=0 \qquad ((1),\ (2)\text{と } B(X)\text{ の関係式から})
\end{aligned}
$$

以上より， X もまた，性質 P を満たす。

(4)　3 点 O(0，0)， A($n-2$，0)， B(0，1) とし， T を直角三角形 OABとする。
このとき， $I(T)=0$ であり， $B(T)=n-2+2=n$ となる。

(5)　直角三角形 OAB を考える（ T とおく）。
(3)より，

$$S(T)=I(T)+\frac{1}{2}B(T)-1=\frac{1}{2}B(T)$$

したがって， $B(T)$ の値は，面積の 2 倍，すなわち，直角を挟む 2 辺の積と等しい。

直角を挟む二辺の長さは，ともに非負整数 s， t を用いて $\sqrt{s^2+t^2}$ と表される。

$3\leqq B(T)=n\leqq 9$ より， 2 辺のうち短い方の長さ $S=\sqrt{s^2+t^2}$ の範囲は

$$1\leqq\sqrt{s^2+t^2}\leqq\sqrt{9}=3$$

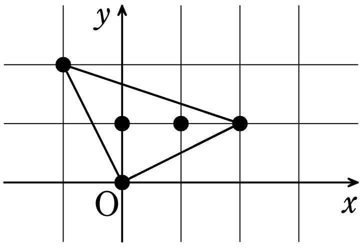
であり， s， t の取り方により， S は 1，$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，3 のいずれかとなる。

ここで， $S=1$ のときは，(4)での直角三角形と同じ形になるので， T の内部に格子点が存在しないことから，

＊ $B(T)=3$，7 のときは， $S=1$ のときしかないので不適。

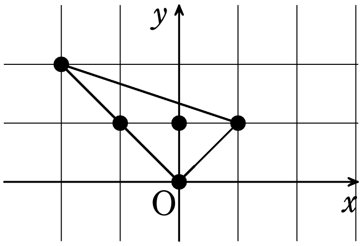
＊ $B(T)=5$ のときは， $S=1$ のときと， 2 辺の長さがともに $\sqrt{5}$ であるときで，後者の場合は下図のようなものしかなく，このとき $I(T)=2$ となり不適。

$B(T)=5$

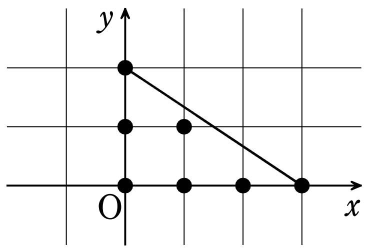


＊ $B(T)=4，6，8，9$ のときは下図の例により $I(T)=1$ となるものがある。

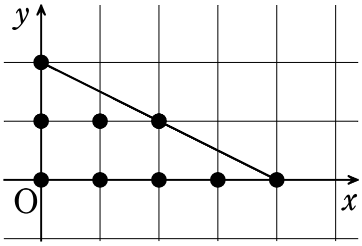
$B(T)=4$



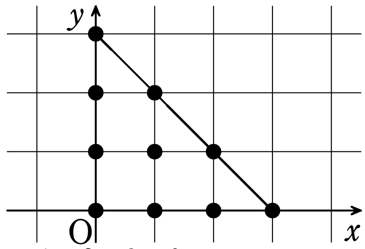
$B(T)=6$



$B(T)=8$



$B(T)=9$



以上より，$I(T)=1$ となる $B(T)$ の 3 以上 9 以下の範囲は 4，6，8，9。

別解　原点を直角とする直角三角形 T を考える（対称性より，y 軸方向の方が長いとしても一般性は失われない。）

(a)　T の 2 辺が x 軸上，y 軸上にあるとき

$I(T)=1$ より，T の唯一の内部の点は $(1，1)$。（違うとすると，x 軸，y 軸の両軸上にないものとして，x 軸方向または y 軸方向に -1 平行移動したものがあって，それも内部となるので不適）

また，$(2，1)$，$(1，2)$ は T の境界または外部なので，$(1，2)$，$(2，1)$ を結ぶ線分も境界または外部。

よって，斜辺は，$(1，2)$，$(2，1)$ を通るか，$(1，2)$，$(2，0)$ を通るか，$(0，3)$，$(2，0)$ を通る直線上。

したがって，$B(T)$ はそれぞれ 9，8，6 となり，それらのみとなる。

(b)　(a)以外のとき

直角三角形が y 軸の上側にあり，原点以外の 2 頂点のうち，右側の y 座標の方が小さいときを考える。

原点以外の 2 頂点の y 座標がともに 2 より大きい，すなわち，3 以上とすると，$(0，1)$，$(0，2)$ が内部となり不適。

また，2 頂点の左側の y 座標が 2 より大きく，右側の y 座標が 2 とする。このときも上と同様に $(0，1)$，$(0，2)$ が内部となり不適。

以上から，条件を満たすのは，2 頂点の y 座標が 2 のときと，右側の y 座標が 1 になるときしかない。

これらのとき，$(1，1)$ が内部にならないのは，右側の頂点と原点を結ぶ直線の傾きが 1 のときのみ。これと $(-1，2)$ が境界または外部になるのは，2 頂点が $(2，2)$，$(-2，2)$ か，$(-3，3)$，$(1，1)$ か，$(-2，2)$，$(1，1)$ か，$(-1，1)$，$(1，1)$ のときのみで，それぞれの $B(T)$ は 8，6，4，2 となる。

以上のことから，条件を満たすのは，$B(T)=4，6，8，9$。

これは n が 10 より大きい場合は，条件を満たす直角三角形が存在しないことも示せている。