着眼点

大人数でじゃんけんをするとき，普通にじゃんけんする場合と，代表者１人を決めその人とじゃんけんをする場合（私のまわりでは「王様じゃんけん」と呼んでいました）があります。この問題は，普通のじゃんけんと王様じゃんけんのどちらが“優秀”かを期待値の視点から考えてみようという問題です。

問題のメインは(3)の(d)です。(3)の(a)から(c)で具体的に実験を行い，(d)で普通のじゃんけんと王様じゃんけんの決着をつけます。(d)の問題を解くための準備を(1)(2)で行っています。普通のじゃんけん vs 王様じゃんけん の結末にびっくりした人は私だけではないはず。

解答例

(1) $k_nC_k=k\times\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots3\times2\times1}=n\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots\{(n-1)-(k-1)+1\}}{(k-1)(k-2)\cdots3\times2\times1}$

$=n_{n-1}C_{k-1}$

より $\boxed{①}$ に当てはまる式は $n-1$，$\boxed{②}$ に当てはまる式は $k-1$。

(2)(a) 反復試行の確率を考えて，${}_nC_r\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^r\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{n-r}=\dfrac{{}_nC_rx^r}{(1+x)^n}$

(b) $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のとき，それぞれの事象は互いに排反であり，
$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の和事象は全事象であるから

$$\frac{{}_nC_0x^0}{(1+x)^n}+\frac{{}_nC_1x}{(1+x)^n}+\frac{{}_nC_2x^2}{(1+x)^n}+\cdots+\frac{{}_nC_nx^n}{(1+x)^n}=1$$

両辺を $(1+x)^n$ 倍して

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

(3)(a) ２人でじゃんけんを行うとき，手の出方は 3^2 通り。
１人勝つとき，勝つ人は ${}_2C_1$ 通りで，勝つ手は３通りだから

$$p_1=\frac{{}_2C_1\times3}{3^2}=\frac{2}{3}$$

あいこは余事象を考えて，$p_2=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ より

$$E_2=\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2=\frac{4}{3}$$

先生に勝つかあいこになる確率は $\dfrac{2}{3}$，負ける確率は $\dfrac{1}{3}$ より

$$q_1={}_2C_1\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

余事象を考えて，$q_2=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$ より

$$F_2=\frac{4}{9}\times1+\frac{5}{9}\times2=\frac{14}{9}$$

(b)　(a)と同様にして計算すると下の表のようになる。

K	1	2	3	合計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
PK	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	2

$E_3=2$

K	1	2	3	合計
Q	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	1
QK	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{19}{9}$

$F_3=\dfrac{19}{9}$

(c)

K	1	2	3	4	合計
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{13}{27}$	1
PK	$\frac{4}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{52}{27}$	$\frac{80}{27}$

$E_4=\dfrac{80}{27}$

K	1	2	3	4	合計
Q	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{17}{81}$	1
QK	$\frac{8}{81}$	$\frac{48}{81}$	$\frac{96}{81}$	$\frac{68}{81}$	$\frac{220}{81}$

$F_4=\dfrac{220}{81}$

(d)　(a)～(c)より $n\geqq 4$ であることが予想できる。以下でこのことを証明する。

まずは E_n を求める。

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ のとき，手の出方は 3^n 通り。勝つ人は ${}_nC_k$ 通り，勝つ手は3通りより

$$p_k=\frac{{}_nC_k\times 3}{3^n}=\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

p_n は余事象を考えて，$p_n=1-\dfrac{{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}}{3^{n-1}}$

ここで，$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ の $x=1$ のときを考えて

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$ より

$$p_n=1-\frac{2^n-{}_nC_0-{}_nC_n}{3^{n-1}}=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

よって，

$$E_n=\frac{{}_nC_1+{}_nC_2\times 2+{}_nC_3\times 3+\cdots+{}_nC_{n-1}\times(n-1)}{3^{n-1}}+n\left(1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\right)$$

ここで，$k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$ より

$$\frac{{}_nC_1+{}_nC_2\times 2+{}_nC_3\times 3+\cdots+{}_nC_{n-1}\times(n-1)}{3^{n-1}}$$

$$=\frac{n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2})}{3}=\frac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}$$

したがって

$$E_n=\frac{n(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}}+n\left(1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\right)=\frac{-n\times 2^{n-1}+n}{3^{n-1}}+n$$

次に，F_n を求める。

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ のとき，$q_k={}_nC_k\times\left(\frac{2}{3}\right)^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\frac{{}_nC_k\times 2^k}{3^n}$

q_n は余事象を考えて，$q_n=1-\frac{{}_nC_1\times 2+{}_nC_2\times 2^2+{}_nC_3\times 2^3+\cdots+{}_nC_{n-1}\times 2^{n-1}}{3^n}$

ここで，$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ の $x=2$ のときを考えて，

$3^n={}_nC_0+{}_nC_1\times 2+{}_nC_2\times 2^2+\cdots+{}_nC_n\times 2^n$ より，

$$q_n=1-\frac{3^n-{}_nC_0-{}_nC_n\times 2^n}{3^n}=1-\frac{3^n-1-2^n}{3^n}$$

したがって，

$$F_n=\frac{{}_nC_1\times 2+{}_nC_2\times 2^2\times 2+{}_nC_3\times 2^3\times 3+\cdots+{}_nC_{n-1}\times 2^{n-1}\times(n-1)}{3^n}+n\left(1-\frac{3^n-1-2^n}{3^n}\right)$$

ここで，$k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ と $3^n={}_nC_0+{}_nC_1\times 2+{}_nC_2\times 2^2+\cdots+{}_nC_n\times 2^n$ より，

$$\frac{{}_nC_1\times 2+{}_nC_2\times 2^2\times 2+{}_nC_3\times 2^3\times 3+\cdots+{}_nC_{n-1}\times 2^{n-1}\times(n-1)}{3^n}$$

$$=\frac{2\{{}_nC_1+{}_nC_2\times 2\times 2+{}_nC_3\times 3\times 2^2+\cdots+{}_nC_{n-1}\times(n-1)\times 2^{n-2}\}}{3^n}$$

$$=\frac{2n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1\times 2+{}_{n-1}C_2\times 2^2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}\times 2^{n-2})}{3^n}=\frac{2n(3^{n-1}-2^{n-1})}{3^n}$$

したがって，

$$F_n=\frac{-n\times 3^{n-1}+n}{3^n}+n$$

$E_n>F_n$ より，$\quad \frac{-n\times 2^{n-1}+n}{3^{n-1}}+n>\frac{-n\times 3^{n-1}+n}{3^n}+n$

$$-3n\times 2^{n-1}+3n>-n\times 3^{n-1}+n$$

$$2>3\times 2^{n-1}-3^{n-1}$$

$n=2,\ 3$ のときは(3)の(a)(b)の結果より，$E_n<F_n$ であり，

$n\geqq 4$ のとき $\frac{3\times 2^{n-1}}{3^{n-1}}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<1$ より $3\times 2^{n-1}<3^{n-1}$

つまり，$3\times2^{n-1}-3^{n-1}<0$

したがって，$2>3\times2^{n-1}-3^{n-1}$ が成り立つ。

以上より，求める条件は $n\geqq4$