参考　『円をめぐる冒険』（アルフレッド・ポザマンティエ＆ロベルト・グレトシュレーガー著　紀伊国屋書店刊）

ミケルの定理『△ABCの辺BC，CA，AB上にそれぞれ点D，E，F（ただし，D，E，FはA，B，Cとは重ならない）をとって，△FBD，△EDC，△AFEの外接円を描くと，３つの円は一点で交わる』を題材にしました。オーギュスト・ミケル（1816～1851）はフランスの数学者です。

出題者からの補足

今回の問題は３つの円が一点で交わることを実際に作図によって確かめて，その理由を考えてもらうのが主眼です。特に，前半は教科書にもあることですので，易しく感じる人も多いかと思います。後半も，例年の数学コンテストの問題から見るとかなり易しいと思います。

ミケルの定理は証明も難しくなく，結果も当たり前に思えてコンテストの問題としては易しすぎるようにも思えます。ミケルがこの定理を発表したときも，他の数学者の中にはこの定理の事実はすでに知っているといった人もいたらしいです。ただ，受験者自らが作図をしてこの３つの円が一点で交わることを発見してもらえれば，数学の楽しさの一部でもわかってもらえるのではないかと思って出題しました。

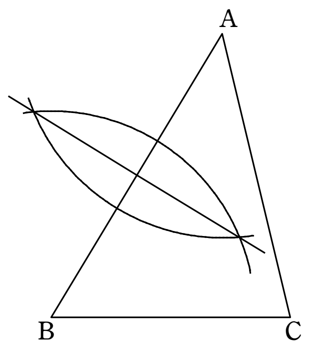
解答例

(1)　辺ABの垂直２等分線は，２点A，Bからの距離が等しい点をつないだものなので，以下のように作図するとよい。

①　コンパスを用いて点Aを中心にABの長さの半分より大きい半径を持つ円を描く。

②　①と同様にコンパスを用いて点Bを中心に①の円と同じ半径を持つ円を描く。

③　①と②の円は２点で交わるので，この２点を通る直線を引く。これが辺ABの垂直２等分線である。



解説：辺ABの中点を求め，ABに垂直な直線を作図してもよいが，定規の目盛りを用いて長さを求める方法や，直角三角形の定規を用いて直角を作るのは本来の定規とコンパスを用いた作図という指示とは異なる。

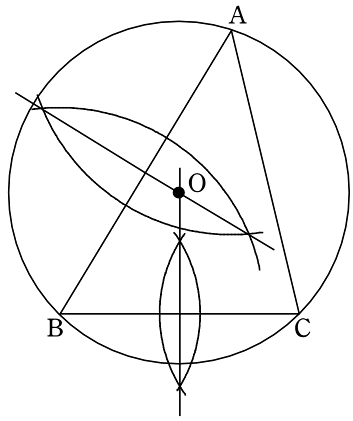
一般的に，定規とコンパスを用いて作図するという場合，出来ることは次のことである。

定規～定められた２点を結ぶ直線を引くこと

コンパス～与えられた半径の円を描くこと

与えられた線分の長さを別の線分に移すこと

(2)　(1)と同様に辺 BC の垂直 2 等分線を作図し，２つの垂直 2 等分線の交点を求めると三角形の外心となる。

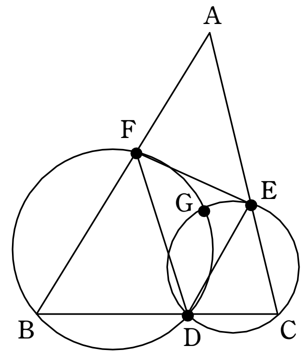


解説：本来は辺 CA の垂直 2 等分線も描いて 3 直線が一点で交わることもいうべきだが，２本の垂直 2 等分線で交点が求まり，3 点からの距離が等しいことがいえるので省略した。

(3)　点 O は辺 AB の垂直 2 等分線上の点であるので $AO＝BO$ が成り立ち，辺 BC の垂直 2 等分線上の点でもあるので $BO＝CO$ が成り立ち，$AO＝BO＝OC$となる。よって，点 O は△ABC の外接円の中心である。

解説：別の表現で，△OAB は二等辺三角形なので $AO＝BO$，などとしてもよい。最終的には，$AO＝BO＝CO$ が説明できればよしとする。辺の垂直 2 等分線上の点は辺の両端から等距離にあるということを用いてよい。証明を求められたら，△OAL と△OBL の合同を用いて $AO＝BO$ と $BO＝CO$ を示すのが一般的だと思う。

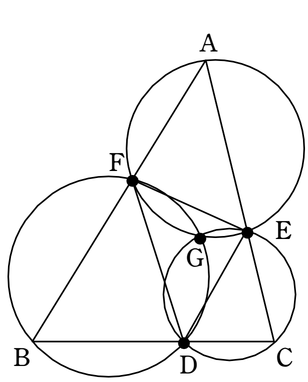
(4)　点 G は△EDC の外接円上の点であるので，四角形EGDC は円に内接する四角形である。



点 G は弦 ED に対して点 C の反対側にある点なので $\angle EGD＝180°−\angle C$ が成り立つ。

解説：２つの円の交点 G は△EDC の外接円上の点であるので，四角形EGDCは円に内接する四角形である。円周角の性質より，△EDC の外接円上の点を K とすると，点 K が辺 ED に関して点 C と同じ側の点であるとき，円周角の性質より $\angle EKD＝\angle ECD(＝\angle C)$ が成り立ち，点 K が辺 ED に関して点 C と反対側にある点であるとき，$\angle EKD＝180°−\angle ECD$ が成り立っている（円に内接する四角形の条件）。

(5)　△FBD，△EDC，△AFEの外接円は一点で交わる。



説明：△AFE において，辺 AF と AE の垂直 2 等分線を引き，それらの交点を求め，△AFE の外接円を描くと，△AFE の外接円は点 G を通ることが分かる。（実際に定規とコンパスを用いて図を描くと，自分でこの定理を発見できるというのがポイントです。）

(6)　△FBD の外接円についても $\angle FGD＝180°−\angle B$が成り立つので，

$\angle FGE＝360°−\angle EGD−\angle FGD＝360°−(180°−\angle C)−(180°−\angle B)＝\angle B＋\angle C$

よって，△AFE の外接円に対して $\angle FGE＝\angle B＋\angle C＝180°−\angle A$が成り立つので，

点Gは△AFEの外接円上にある。よって，３つの円は一点で交わる。

説明：円に内接する四角形の対角の和は180°である。この逆を用いて，対角の和が180°である四角形は円に外接することが示せる。

着眼点

今回の問題２は数学Aの平面図形に関する問題です。平面図形の性質については中学校でも扱っていますし，また，数学の分野の中でも古代ギリシア以来の長い歴史を持つ分野であるので，面白い題材も見つけやすいということもあります。

さて，今回，(5)(6)で扱ったのは「ミケルの定理」です。この定理を発見して1838年に発表したのはオーギュスト・ミケルというフランスの数学者です。不思議なことに，この定理が発表されたときに，何人かの有名な数学者は，この定理を自分はすでに知っていた，と言ったそうです。非常に美しい結果なので，昔の人がとっくに発見して発表ずみであると思って発表しなかったのではないかと思われます。今回，私がこの問題を出題した理由は，定規とコンパスを用いて図を描くことによって，この定理が成り立つことを生徒の皆さんが自分で発見できるのではと思ったからです。また，証明もそんなに難しくありません。実際，今回このコンテストに参加してくれた人のうち40人近くが(6)でパーフェクトな証明（説明）をしています。自分が発見した定理を自分で証明できるなんて素晴らしいと思いませんか？

普通，平面図形の性質については「証明せよ」という形での出題が多いと思いますが，今回のコンテストの問題ではあえて「証明せよ」ではなく「説明せよ」という形での出題としました。今回，(3)では説明の解答欄を１行にしましたので，このスペースを意識して書いてもらいたいと思いました。今回の問題は例年の平面図形の問題と比べると易しかったのではないかと思います。とはいえ，多くの人が最後まで考えて答案を書いてくれました。最後まで取り組んだ皆さんに賞賛を送りたいと思います。

(1)　辺ABの垂直２等分線は点Aからの距離と点Bからの距離が等しい点をコンパスで２個作図し，その２点を定規で結ぶとよいです。コンパスがなくても作図方法がしっかり示されていればOKとしました。

(2)　２つの辺の垂直２等分線を作図し，２本の直線の交点をOとして図の中に描きこめばOKです。点Oを入れるのを忘れた人は減点しています。

(3)　１行で説明するので「～だから～である」という形の説明を期待しました。理由と結果を書いてほしかったので，どちらか片方だけの人は減点されている場合があります。こちらで用意した解答は

「△OABはOA＝OBの二等辺三角形，△OBCはOB＝OCの二等辺三角形だから，OA＝OB＝OCである。よって，点Oは△ABCの外接円の中心である。」

前半部分は線分の垂直２等分線上の点は線分の両端から等距離にあること，後半部分は点Oが△ABCの３頂点から等距離にあるということが書かれてあれば，基本OKとしました。

二等辺三角形であることの証明（△AOLと△BOLの合同）から始めてもよいので

すが，１行ではおさまりきらなくなります。ただし長くなっても減点はしていません。

(4)　点Gは△EDC上の点で，弦DEについて点Cの反対側にあるので，円周角の性質より$\angle DGE+\angle C=180^\circ$。よって，$\angle DGE=180^\circ-\angle C$。または，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$より$\angle DGE=\angle B+\angle C$でもOKです。

(5)　前半は△AFEの外心の作図で，ほぼ(2)と同じです。後半は，前半で求めた外心を中心に点A，F，Eを通る円を描くと，何とこの円は２つの三角形の外接円の交点を通るではありませんか！これは，実際にコンパスを用いて作図したらきっと気がつくことではないかと思って出題しました。解答は「点Gを通る」でも「１点を通る」でも，どちらでもよいです。配点は作図で４点，交点の説明で３点です。

(6)　点Gは２つの三角形（△FBDと△EDC）の外接円の交点なので，点Gはもう１つの△AFEの外接円上にあることを示せばよいです。ですから，円周角の定理より，$\angle FGE=180^\circ-\angle A$になることを示せばよいです。