問題５

着眼点

対称性により，正多角形の辺や角には美しい関係性があります。その一方で，辺や角には自由度がなく，個性がないとも言えます。

本問題では，辺の自由度を高めた等角多角形において，辺がどのような性質を有するか探究するものです。

想定での解答は，数学Ⅰ・Ａ双方の知識・技能や前問の手法の活用が必要です。

解答例

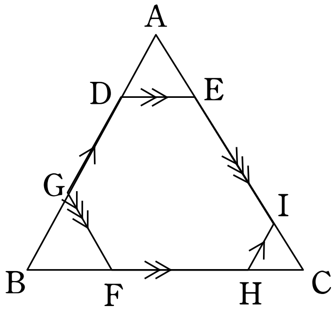
(1)　図のように正三角形 ABC において，辺 AB上に２点 D，Gを，辺 BC 上に２点 F，H を，辺 CA 上に２点 I，E を， $BC /\!/ DE$， $CA /\!/ FG$， $AB /\!/ IH$ となるようにとる。（ただし，３線分 DE，FG，IH はどの２線分も互いに交わらないものとする。）

このとき，△ADE も正三角形であるので， $\angle ADE = \angle AED = 60°$。

したがって， $\angle BDE = \angle CED = 180° - 60° = 120°$。

同様にして， $\angle CFG = \angle AGF = \angle BHI = \angle AIH = 120°$。

以上より，六角形 EDGFHI は内角がすべて 120° で等しいので，等角六角形であることがわかる。



(2)　(1)と逆に，等角六角形 ABCDEF について，条件より等角六角形の外角もすべて等しく，外角の大きさは $360° \div 6 = 60°$ 。

ここで，直線 FAと直線 CB，直線 BC と直線 ED，直線 DE と直線 AF の交点をそれぞれ G，I，H とおく。

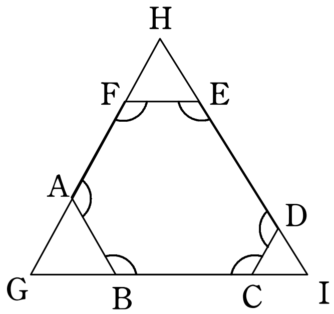
このとき，△GAB において $\angle A = \angle B = 60°$ より，$\angle G = 180° - \angle A - \angle B = 60°$。

同様に， $\angle H = \angle I = 60°$。

したがって，△GHI は正三角形となる。

また， $\angle GAB = \angle GHI = 60°$ より， $AB /\!/ HI$ 。

同様に， $BC /\!/ EF$， $CD /\!/ GH$ なので，等角六角形は(1)の方法で作られる。



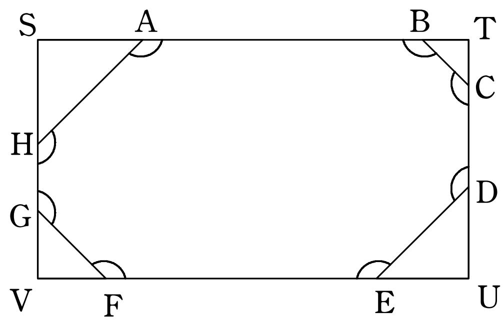
(3)　図より，等角八角形 ABCDEFGH において，(2)と同様に，外角は $360° \div 8 = 45°$ 。

ここで，(2)と同様に，直線 BA と直線 GH，直線 DCと直線 AB，直線 FE と直線 CD，直線 EF と直線 HG の交点をそれぞれ S，T，U，V とおく。

このとき，△SHA は $\angle A = \angle H = 45°$ より， $\angle S = 180° - \angle A - \angle H = 90°$。

同様に， $\angle T = \angle U = \angle V = 90°$ となるので，

四角形STUVは長方形であり， $ST=VU$。



また，

$$ST=SA+AB+BT$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(AH+BC)+AB$$
$$VU=VF+FE+EU$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(FG+DE)+FE$$

したがって， $\frac{\sqrt{2}}{2}(AH+BC)+AB=\frac{\sqrt{2}}{2}(FG+DE)+FE$

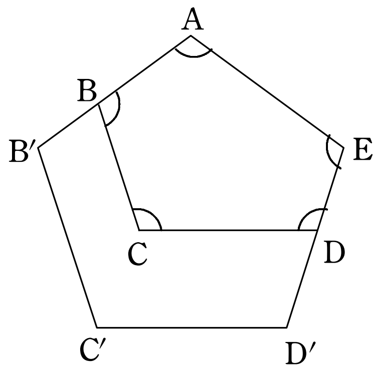
AH，BC，AB，FG，DE，FEは自然数であるから，$AH+BC$，$FG+DE$，AB，FEは有理数である。 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ が無理数であることから

$$AH+BC=FG+DE\ ,\quad AB=FE$$

したがって，図形の対称性より，$AH=DE$，$HG=CD$，$FG=BC$が成り立つ。

つまり，辺の長さがすべて自然数である等角八角形は対辺の長さが等しい。

(4) 図のように，等角五角形ABCDEにおいて，AEが最大辺としても一般性は失われない。



このとき，半直線AB上に点B′を，半直線ED上に点D′を $AB'=ED'=AE$ となるようにとる。また，点B′を通ってBCと平行な直線と点D′を通ってCDと平行な直線の交点をC′とする。

このとき， $BC/\!/B'C'$， $CD/\!/C'D'$ より，

$$\angle ABC=\angle AB'C',\ \angle EDC=\angle ED'C'。$$

ここで，条件より，等角五角形ABCDEの内角はすべて $180^\circ-360^\circ\div5=108^\circ$ であるので

$$\angle C'=540^\circ-\angle A-\angle E-\angle AB'C'-\angle ED'C'=108^\circ$$

したがって，五角形AB′C′D′Eはすべての内角が等しい。

一方，この五角形の辺について，$AB'=AE=ED'$ であることから，$\triangle AB'E$ は $AB'=AE$ である二等辺三角形となるので，

$$\angle AB'E=\angle AEB'=(180^\circ-108^\circ)\div2=36^\circ$$

ゆえに，

$$\angle EB'C'=\angle B'-\angle AB'E=108^\circ-36^\circ=72^\circ\ 。$$
$$\angle B'ED'=\angle E-\angle AEB'=108^\circ-36^\circ=72^\circ$$

よって，

$$\angle EB'C'+\angle C'=72^\circ+108^\circ=180^\circ\ ,\quad \angle B'ED'+\angle D'=72^\circ+108^\circ=180^\circ$$

から $B'E/\!/C'D'$ であるので，四角形B′C′D′Eは等脚台形であり， $B'C'=D'E$ 。

同様に， $C'D'=AB'$ が得られることから，五角形AB′C′D′Eはすべての辺の長さが等しいことがわかる。

以上により，五角形 AB′C′D′E′ は正五角形である。

逆に，この(4)の初めの構成を逆に行うことにより，すべての等角五角形は正五角形から作られる。

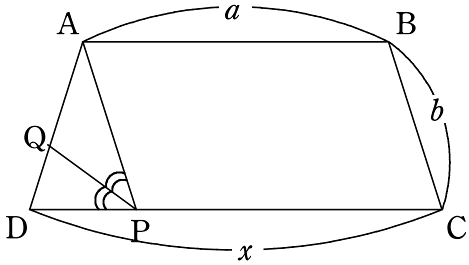
(5) 図のように点 A，B，C，D を定め，点 A を通って BC に平行な直線と CD との交点を P とおく。

このとき，(4)より四角形 ABCP は平行四辺形なので，AP＝BC 。

また，四角形 ABCD は∠D＝72° の等脚台形なので，AD ＝ BC。

以上により，△APD は AD＝AP の二等辺三角形で，

∠D＝∠APD＝72°， ∠DAP＝180°−72°÷2＝36° 。



ここで，∠APD の二等分線と AD との交点を Q とおくと，△DPQ において

$$\angle\mathrm{DPQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{APD}=\frac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ$$

から，△APD と △PDQ は相似なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\mathrm{PD}:\mathrm{DQ}$$

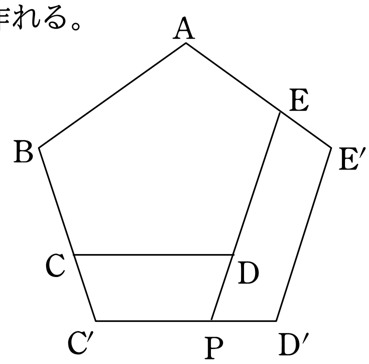
$$b:(x-a)=(x-a):\{b-(x-a)\}$$

これを解くと， $x=a+\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}b$ となるが， $x>a$ であることから

$$x=a+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}b$$

(6) 等角五角形 ABCDE において，AB を最大辺としても一般性は失われない。

(4)の構成法を辿ると，図のように正五角形ABC′D′E′ が作れる。



DE と C′D′ との交点を P とおくと，四角形 E′ED′P は等脚台形となるので，PD′＝EE′ 。

四角形 CC′PD も等脚台形となるので，CC′＝PD 。

(5)より $\mathrm{PE}=\mathrm{D'E'}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{PD'}$ となるので

$$\mathrm{DE}=\mathrm{PE}-\mathrm{PD}=\mathrm{D'E'}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{PD'}-\mathrm{CC'}$$

$$=\mathrm{PE}-\mathrm{PD}=\mathrm{D'E'}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{EE'}-\mathrm{CC'}$$

ここで， AB＝D′E′ ， CC′＝BC′−BC＝AB−BC ， EE′＝AE′−AE＝AB−AE より，

$$\mathrm{DE}=\mathrm{AB}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(\mathrm{AB}-\mathrm{AE})-(\mathrm{AB}-\mathrm{BC})$$

$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{AB}-\mathrm{AE})+\mathrm{BC}+\frac{\sqrt{5}}{2}(\mathrm{AB}-\mathrm{AE})$$

AB，DE，AE，BC はすべて自然数であり， $\sqrt{5}$ は無理数であるから

AB＝AE ， DE＝BC

同様にして，AB＝BC ， CD＝AE も得られる。

これらから，$AB=DE=BC=AE=CD$ となるので，辺の長さが自然数である等角五角形は正五角形のみとなる。