問題４

着眼点

「２次方程式 $x^2-3x+2=0$ を解け」という問いに対し，

「$x=1$ を左辺に代入すると，(左辺)$=1^2-3\cdot 1+2=0$ となるので，

$x=1$ が解である。」

と答えても正解になりません。また，

「$x=1$ を左辺に代入すると，(左辺)$=1^2-3\cdot 1+2=1-3+2=0$，

$x=2$ を左辺に代入すると，(左辺)$=2^2-3\cdot 2+2=4-6+2=0$ となるので，

$x=1$，２が解である。」

と答えても，これだけでは不十分です。（$x=1$，２のほかに解がないことが示されていない）

条件を満たすものをすべて求めること，そして，他に条件を満たすものがないことをどのように説明するかが大事です。

解答例

(1)　ア）$n>7$ のとき

$n=7+k$ （kは自然数）とすると

$$2^7+2^n=2^7+2^{7+k}=(2^3)^2\cdot 2(1+2^k)$$

2^7+2^n が平方数となるためには，$2(1+2^k)$ が平方数であること，すなわち，$2(1+2^k)$ のすべての素因数が偶数個であることが必要である。

しかし，$1+2^k$ は奇数であるから，$2(1+2^k)$ は素因数２を１個しかもたないので，$2(1+2^k)$ は平方数にならない。

イ）$n<7$ のとき

$n=7-k$ （kは$1\leqq k\leqq 6$ を満たす自然数）とすると

$$2^7+2^n=2^{k+n}+2^n=2^n\cdot(2^k+1)$$

2^k+1 は奇数であるから，2^7+2^n が平方数となるためには，2^n が平方数であること，すなわち，n が偶数であることが必要である。

$n=2$ のとき　$2^7+2^n=2^7+2^2=2^2(2^5+1)=2^2\cdot 33$　これは平方数でない。

$n=4$ のとき　$2^7+2^n=2^7+2^4=2^4(2^3+1)=2^4\cdot 3^2$　これは平方数である。

$n=6$ のとき　$2^7+2^n=2^7+2^6=2^6(2+1)=2^6\cdot 3$　これは平方数でない。

ウ）$n=7$ のとき

$$2^7+2^n=2^7+2^7=2\cdot 2^7=2^8$$　これは平方数である。

よって，ア～ウより，2^7+2^n が平方数となるのは $n=4$，７のときに限られる。

別解　$2^7+2^n=p^2$ （pは自然数）と表されるとすると，n が自然数のとき左辺 2^7+2^n は偶数であるから，右辺 p^2 も偶数である。

よって，pは偶数であるから $p=2N$ （Nは自然数）とおくと

$$2^7+2^n=(2N)^2$$
$$2^n=4N^2-2^7$$
$$2^n=2^2(N^2-2^5)$$

左辺は 2 以外の素因数をもたないので，N^2-2^5 は 1 または 2^k（k は自然数）の形で表される。

$N^2-2^5=1$ とすると，$N^2=1+2^5=33$ となり，これを満たす自然数 N は存在しない。

よって，$N^2-2^5=2^k$（k は自然数）とすると，$2^5+2^k=N^2$ となり，左辺 2^5+2^k は偶数であるから，右辺 N^2 も偶数である。

よって，N は偶数であるから $N=2M$（M は自然数）とおくと

$$2^5+2^k=(2M)^2$$
$$2^k=4M^2-2^5$$
$$2^k=2^2(M^2-2^3)$$

左辺は 2 以外の素因数をもたないので，M^2-2^3 は 1 または 2^l（l は自然数）の形で表される。

$M^2-2^3=1$ とすると，$M^2=1+2^3=9$ となり，これを満たす自然数 M は $M=3$ で，このとき，$N=2M=2\cdot3=6$ より，$p=2N=2\cdot6=12$

$2^7+2^n=12^2$ より，$2^n=12^2-2^7=144-128=16=2^4$

ゆえに，$n=4$

$M^2-2^3=2^l$（l は自然数）とすると，$2^3+2^l=M^2$ となり，左辺 2^3+2^l は偶数であるから，右辺 M^2 も偶数である。

よって，M は偶数であるから $M=2P$（P は自然数）とおくと

$$2^3+2^l=(2P)^2$$
$$2^l=4P^2-2^3$$
$$2^l=2^2(P^2-2)$$

左辺は 2 以外の素因数をもたないので，P^2-2 は 1 または 2^j（j は自然数）の形で表される。

$P^2-2=1$ とすると，$P^2=3$ となり，これを満たす自然数 P は存在しない。

$P^2-2=2^j$（j は自然数）とすると，$2+2^j=P^2$ となり，左辺 $2+2^j$ は偶数であるから，右辺 P^2 も偶数である。

よって，P は偶数であるから $P=2Q$（Q は自然数）とおくと

$$2+2^j=(2Q)^2$$
$$2^j=4Q^2-2$$
$$2^j=2(2Q^2-1)$$

左辺は 2 以外の素因数をもたないので，$2Q^2-1$ は 1 または 2^i（i は自然数）の形で表される。しかし，Q が自然数であることから $2Q^2-1$ は奇数となるので，2^i（i

は自然数）の形に表されることはない。

$2Q^2-1=1$ とすると，$Q^2=1$ となり，これを満たす自然数 Q は $Q=1$ で，このとき，$P=2Q=2\cdot 1=2$，$M=2P=2\cdot 2=4$，$N=2\cdot 4=8$，$p=2N=2\cdot 8=16$

$2^7+2^n=16^2$ より，$2^n=16^2-2^7=256-128=128=2^7$

ゆえに，$n=7$

以上のことから，$n=4,\ 7$

(2) 2^n+1 が平方数だから，$2^n+1=p^2$（p は自然数）とする。

$$\begin{aligned}2^n&=p^2-1\\&=(p+1)(p-1)\end{aligned}$$

$p+1$ と $p-1$ は異なる整数で，その奇偶は一致する。また，左辺は 2 以外の因数をもたないので，

$$\begin{cases}p+1=2^s\\p-1=2^t\end{cases}$$

を満たす正の整数 s と t（ただし，s，t は $s+t=n$ かつ $s>t$ を満たす）が存在する。

これより，$p=2^s-1=2^t+1$

$$2^s-2^t=2$$

$$2^t(2^{s-t}-1)=2$$

となる。

$2^{s-t}-1$が奇数なので，

$$\begin{cases}t=1\\2^{s-t}-1=1\end{cases}$$

となる。

これより，$s=2$，$t=1$

よって，2^n+1 が平方数となるのは，$n=2+1=3$ のときだけである。

このとき，

$$2^n+1=2^3+1=9=3^2$$

で，$n=3$ に対して平方数 p^2 が確かに存在する。

(3) $2^8+2^{11}+2^n$ が平方数だから，$2^8+2^{11}+2^n=p^2$（p は自然数）とする。

$$\begin{aligned}2^n&=p^2-(2^8+2^{11})\\&=p^2-2^8(1+2^3)\\&=p^2-2^8\cdot 3^2\\&=(p+48)(p-48)\end{aligned}$$

$p+48$ と $p-48$ は異なる整数で，その奇偶は一致する。また，左辺は 2 以外の因数をもたないので，

$$\begin{cases}p+48=2^s\\p-48=2^t\end{cases}$$

を満たす正の整数 s と t（ただし，s，t は $s+t=n$ かつ $s>t$ を満たす）が存在する。

これより，　$p=2^s-48=2^t+48$

$$2^s-2^t=96$$

$$2^t(2^{s-t}-1)=2^5\cdot 3$$

となる。

$2^{s-t}-1$が奇数であり，かつ，右辺に奇数の素因数は3しかないので，

$$\begin{cases} t=5 \\ 2^{s-t}-1=3 \end{cases}$$

となる。

これより，　$s=7$，$t=5$

よって，$2^8+2^{11}+2^n$ が平方数となるのは，$n=7+5=12$ のときだけである。

このとき，

$$\begin{aligned} 2^8+2^{11}+2^n &= 2^8+2^{11}+2^{12} \\ &= 256+2048+4096 \\ &= 6400=80^2 \end{aligned}$$

で，$n=12$ に対して平方数 p^2 が確かに存在する。

(4)　$2^5+2^7+2^n$ が平方数となる自然数 n が存在すると仮定して，背理法で証明する。

$2^5+2^7+2^n=p^2$ …※を満たす自然数 p が存在するならば，※の左辺が偶数になることから，※の右辺 p^2 も偶数である。

よって，p は偶数であるから，$p=2q$（p は自然数）とすると，

$$2^5+2^7+2^n=(2q)^2$$

$$2^n=4q^2-2^5-2^7$$

$$2^n=2^2(q^2-2^3-2^5) \cdots ①$$

①の左辺は2以外の因数をもたないので，$q^2-2^3-2^5$ は1または 2^m（m は自然数）の形で表されるが，$q^2-2^3-2^5=1$とすると，$q^2=1+2^3+2^5=1+8+32=41$ となって，これを満たす自然数 q は存在しない。

したがって，$q^2-2^3-2^5=2^m$ とすると，$2^3+2^5+2^m=q^2$ …②であり，②の左辺が偶数になることから，②の右辺 q^2 も偶数である。

よって，q は偶数であるから，$q=2r$（r は自然数）とすると，

$$2^3+2^5+2^m=(2r)^2$$

$$2^m=4r^2-2^3-2^5$$

$$2^m=2^2(r^2-2-2^3) \cdots ③$$

③の左辺は2以外の因数をもたないので，r^2-2-2^3 は1または 2^l（l は自然数）の形で表されるが，$r^2-2-2^3=1$とすると，$r^2=1+2+2^3=1+2+8=11$ となって，これを満たす自然数 r は存在しない。

したがって，$r^2-2-2^3=2^l$ とすると，$2+2^3+2^l=r^2$ …④であり，④の左辺が偶数になることから，④の右辺 r^2 も偶数である。

よって，rは偶数であるから，$r=2s$ （sは自然数）とすると，

$$2+2^3+2^l=(2s)^2$$
$$2^l=4s^2-2-2^3$$
$$2^l=2(2s^2-1-2^2) \cdots ⑤$$

⑤の左辺は2以外の因数をもたないので，$2s^2-1-2^2$は1または2^k （kは自然数）の形で表されるが，$2s^2-1-2^2=1$とすると，$2s^2=1+1+2^2=6$となって，これを満たす自然数sは存在しない。

$2s^2-1-2^2=2^k$とすると，$2s^2=2^k+5$ …⑥となり，sが自然数のとき⑥の左辺は偶数，kが自然数のとき⑥の右辺は奇数となって，この等式は成り立たない。

※を満たす自然数pが存在すると仮定したことに矛盾が生じるので，$2^5+2^7+2^n$が平方数となる自然数nは存在しない。