問題３

着眼点

$f(x)=-x+1$ として作問した。

(1)　x，y に様々な値を代入して試してほしい。

④は $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ に気が付くかどうかがポイント。

(2)　x を $-x$，y を $-y$ として 連立方程式をつくる。

(3)　(2)を利用すること。

解答例

(1)①　条件(Ⅰ)に $x=0$，$y=2$ を代入すると

$$\{1-f(2)\}f(0)=f(0)-f(2)$$

$f(2)=-1$ より，$2f(0)=f(0)+1$

よって，$f(0)=1$

②　条件(Ⅰ)に $x=y=2$ を代入すると

$$\{1-f(2)\}f(1)=0$$

条件(Ⅱ)より $f(2)=-1$ なので、$f(1)=0$

③　条件(Ⅰ)に，$x=1$，$y=-1$ を代入すると

$$\{1-f(-1)\}f(-1)=f(1)-f(-1)$$

ここで，②の結果 $f(1)=0$ より

$$f(-1)^2-2f(-1)=0$$

$$f(-1)=0,\ 2$$

$-1<0$ であるから，条件(Ⅲ)より $f(-1)>f(0)$

これと①の結果から，$f(-1)>1$ となるので，$f(-1)=2$

④　条件(Ⅰ)に，$x=2$，$y=\sqrt{2}$ を代入すると

$$\{1-f(\sqrt{2})\}f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=f(2)-f(\sqrt{2})$$

$$\{1-f(\sqrt{2})\}f(\sqrt{2})=-1-f(\sqrt{2})$$

$$\{f(\sqrt{2})\}^2-2f(\sqrt{2})-1=0$$

$$f(\sqrt{2})=1\pm\sqrt{2}$$

$1<\sqrt{2}$ であるから，条件(Ⅲ)より $f(1)>f(\sqrt{2})$

これと②の結果から，$0>f(\sqrt{2})$ となるので，$f(\sqrt{2})=1-\sqrt{2}$

(2)　$g(x)=f(x)+c$ より，$f(x)=g(x)-c$ を条件(Ⅰ)に代入すると

$$\{1-g(y)+c\}\left\{g\left(\frac{x}{y}\right)-c\right\}=g(x)-g(y)\quad\cdots\cdots①$$

①において，x を $-x$，y を $-y$ とすると

$$\{1-g(-y)+c\}\left\{g\left(\frac{-x}{-y}\right)-c\right\}=g(-x)-g(-y)$$

$g(-x)=-g(x)$， $g(-y)=-g(y)$ となることより

$$\{1+g(y)+c\}\left\{g\left(\frac{x}{y}\right)-c\right\}=-g(x)+g(y) \quad \cdots\cdots②$$

①＋②より， $2(1+c)\left\{g\left(\dfrac{x}{y}\right)-c\right\}=0$

ここで，条件(Ⅲ)より $f(x)$ は定数関数ではない。

（注：関数 $f(x)$ が定数関数であるとは， x がどのような値をとっても $f(x)$ の値が変わらない定数値の関数のことをいう）

したがって， $g(x)$ も定数関数にならないので， $g\left(\dfrac{x}{y}\right)-c\neq 0$

よって， $c=-1$

また，$c=-1$ のとき， $g(x)=f(x)-1$である。

条件(Ⅰ)において， $y=-1$ を代入すると

$$\{1-f(-1)\}f(-x)=f(x)-f(-1)$$

(1)③の結果から $f(-1)=2$ なので

$$-\{f(-x)\}=f(x)-2$$

$$f(-x)-1=-f(x)+1$$

$$f(-x)-1=-\{f(x)-1\}$$

よって， $g(-x)=-g(x)$ となる。

(3)　(2)より， $g(xy)=f(xy)-1$

$g(x)=f(x)-1$

$g(y)=f(y)-1$

ここで，条件(Ⅰ)において， x を xy とすると

$$\{1-f(y)\}f(x)=f(xy)-f(y)$$

$$f(x)-f(x)f(y)=f(xy)-f(y)$$

$$\begin{aligned}f(xy)-1&=-f(x)f(y)+f(x)+f(y)-1\\&=-\{f(x)-1\}\{f(y)-1\}\end{aligned}$$

よって， $g(xy)=-g(x)g(y)$