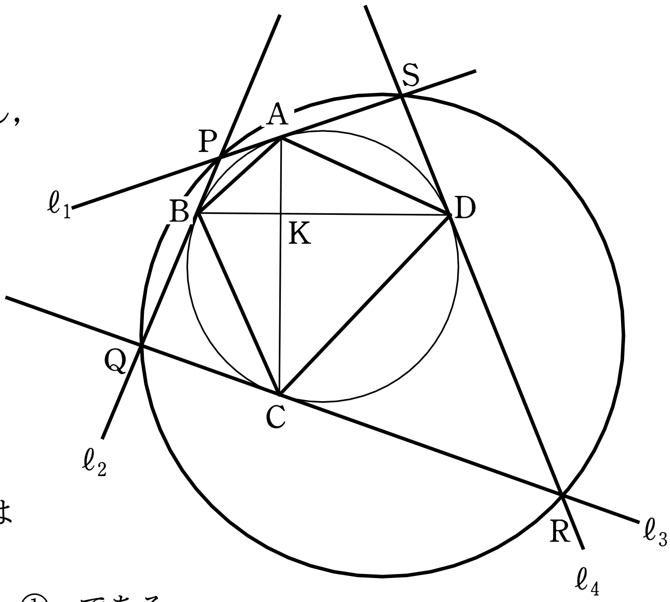
問題２

<u>着眼点</u>

　円の接線と弦のつくる角の定理（接弦定理）と円に内接する四角形の性質を把握しているかどうかがポイントです。

<u>解答例</u>

　円に内接する四角形ABCDを描く。



　4点 A，B，C，Dにおける円 O の接線をそれぞれ ℓ_1， ℓ_2， ℓ_3， ℓ_4 とし，

　　ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P,

　　ℓ_2 と ℓ_3 の交点を Q,

　　ℓ_3 と ℓ_4 の交点を R,

　　ℓ_4 と ℓ_1 の交点を S

とする。

　また，線分 AC と線分 BD の交点を K とする。

　四角形 PQRS が円に内接する条件は

　　$\angle PQR + \angle PSR = 180°$

すなわち　$\angle BQC + \angle ASD = 180°$　…①　である。

　QB＝QC と円の接線と弦のつくる角の定理により，

　　$\angle QBC = \angle QCB = \angle BAC$

であるから，これを α とおく。

　同様に， SA＝SD と円の接線と弦のつくる角の定理により，

　　$\angle SAD = \angle SDA = \angle ABD$

であるから，これを β とおく。

　すると，$\angle BQC = 180° - 2\alpha$，$\angle ASD = 180° - 2\beta$ がえられるので，条件①は

　　$(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 180°$　すなわち　$\alpha + \beta = 90°$

となる。

　よって， $\angle KAB + \angle KBA = 90°$ となるので,

　　$\angle AKB = 90°$　すなわち　$AC \perp BD$　…②である。

　また，逆に，②の条件が満たされるとき，四角形 PQRS は円に内接する四角形になる。

　ゆえに，四角形 PQRS が円に内接するための必要十分条件は $AC \perp BD$ である。