第 4 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　題

昭和60年1月15日（水）

第一部　　　120分

第二部　　　180分

北海道高等学校数学教育会高等学校部会

第 4 回
北海道高等学校数学コンテスト

第 1 部問題

昭和61年 1 月15日(水)

9 時30分～11時30分 (120分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

1 現在使用しているグレゴリオ暦では西暦年数が 4 で割り切れ, 100で割り切れない年をうるう年としています。ただし400で割り切れる年は, うるう年です。(例, 1,900年は平年, 2,000年はうるう年2,100年は平年) また平年は365日, うるう年は366日, 1.3.5. 7.8.10. 12月は31日, 4.6.9.11月は30日, 2 月は平年は28日, うるう年は29日です。

(1) 今年 (1986年) の 1 月 1 日は, 水曜日でした。来年の 1 月 1 日は何曜日ですか。また今年の 5 月 1 日は何曜日ですか, 同じ年の 1 月 1 日と 5 月 1 日は曜日が一致することはありうるでしょうか。来年以降も考えて下さい。

(2) ゴールデンウィークの 4 月29日, 5 月 3 日, 5 月 5 日は祝日です。日曜日が祝日または, その前後にくると連休になります。それではゴールデンウィークに連休がまったく無い年はあるでしょうか。もしあるならば, 次は西暦何年ですか。その理由も書いて下さい。

(3) 曜日は何年を周期に繰返していますか。その最小周期を理由とともに書いて下さい。

2 △ＡＢＣがあって角Ａが直角である。角Ｂの２等分線をひき，辺ＡＣとの交点をD，Ａから対辺ＢＣに垂線をひき，交点をＨとする。

直線ＡＨと直線ＢＤの交点をＥとし，Ｅを通り，ＢＣに平行な直線と，辺ＡＣとの交点をＦとする。

問１　上の文章の意味を表わす図をかけ。(free handでもよい)

問２　ＡＤ＝ＡＥを証明せよ。

問３　ＡＤ＝ＣＦを証明せよ。

（注意）　問２，問３の証明に必要な図は，問１の図に加えてもよいが，なるべくは問題別に図を書け，free hand でよいから説明に必要な図は，ハッキリ書いておけ。

3 整数値m，n に対して，次のようにして$f(m, n)$が定義される。

1° $f(0, n)=n+1$

2° $f(m, 0)=f(m-1, 1)$　　$(m \geqq 1)$

3° m，$n \geqq 1$のとき，$f(m, n)=f(m-1, f(m, n-1))$

このとき次の値を求めよ。

例えば $f(0,3)=3+1=4$ である。

(1) $f(1,0)$

(2) $f(1,3)$，$f(1,n)$

(3) $f(2, 3)$

4 互いに異なる３個の０でない数の集合Ａがあって，Ａの要素のどの２個（重複をゆるす）の積もまたＡの要素であるという。

(1) $A=\{a, b, c\}$ とするとき，$\{a^2, ab, ac\}=A$を示せ。

(2) $A \ni 1$であることを示せ。

$1 \in A$より，$A=\{1, \alpha, \beta\}$ と表せる。このとき$\alpha\beta$の値を調べて

(3) 集合Ａを決定せよ。

第 4 回
北海道高等学校数学コンテスト
第 2 部問題

昭和61年 1 月15日(水)

11時45分～14時45分(180分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

1 p 進法で，$a_n\ a_{n-1}\,a_{n-2}\cdots\cdots a_2a_1a_{0\,(p)}=a_n\times p^n+a_{n-1}\times p^{n-1}+a_{n-2}\times p^{n-2}\cdots+a_2\times p^2+a_1\times p+a_0$ の意味です。例えば $abcd_{(p)}=a\times p^3+b\times p^2+c\times p+d$ となります。ただし，$0<a_n\leqq p-1$，$0\leqq a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots a_2, a_1, a_0, \leqq p-1$ とします。

電子計算機が活躍するようになってから，2 進法が大きく注目されるようになりました。しかし，この 2 進法は少し大きな数になるとすぐに桁数が増えてゆくのが難点です。この為 2 進法を10進法に直す場合によく桁数の読み違いからくるミスが少くありません。そこで，2 進法を 1 度 8 進法とか 4 進法に直して，それから10進法に直す方法で，しかも便利な方法について考えてみましょう。

(注)　何進法の書き表し方であるかをはっきりさせる為に，$abcd_{(p)}$ のように(p)を用いる。また，1 2 3 のように(p)が付けられていない場合のみ10進法ということにする。

(1) 1 1 0 1 1 0 1 1$_{(2)}$を 4 進法で表してみよ。その結果がこの数に図のような区切りを入れて 1 つ 1 つの区切りが 2 進法で表す10進数を書き込む。
(例えば，1 1 | 0 1 | 1 0 | 1 1 の10＝1×2＝2）のと一致することを確かめよ。
1 1 | 0 1 | 1 0 | 1 1

(2) 11011011$_{(2)}$を8進法で表す場合，(1)の考え方を利用して 3 桁毎に区切りを入れ，1 つ1つの区切りが2進法で表す10進法を書き並べるとよいことを(1)と同様に確かめよ。

(3) (2)で確かめたことを，数式の上で証明せよ。

（注）　一般的に文字式で証明してもよいし，11011011(2)を使って証明してもよい。

(4) $abcdef_{(3)}$ $(a \neq o)$ を９進法に直す場合も２桁毎の区切りを入れて

$ab_{(3)}=p$, $cd_{(3)}=q$, $ef_{(3)}=\gamma$　とするとき，

$abcdef_{(3)}=pq\gamma_{(9)}$　となることを証明せよ。

2

ジョーカーをのぞいたトランプのカード52枚から５枚のカードをとったとき，次のように呼ぶことにする。(ただしＪ＝11，Ｑ＝12，Ｋ＝12，Ａ＝１)

(1) ５枚のカードのなかに，同じ数字のカードが３枚あるとき。
（スリーカード）

(2) ５枚のカードのなかに，同じ数字のカードが４枚あるとき。
（フォーカード）

(3) ５枚のカードの数字がすべてつづいているとき。
例えは，８，９，10，11，12　（ストレート）

今52枚のカードをよくまぜてつみあげ，上から５枚とったところ。「◇５，♡５，◇７，♧８，♡９」であった。

(A) 「◇５，◇７，♧８，♡９」を残し「♡５」をのぞき，つみ上げてあるカードから１枚とり５枚とするとき（ストレート）となる確率を求めよ。

(B) 「◇５，♡５」を残して他のカードを取りのぞき，つみ上げてあるカードから３枚とり，５枚とするとき，

イ）（フォーカード）となる確率を求めよ。

ロ）（スリーカード）となる確率を求めよ。

ハ）（スリーカード）または（フォーカード）となる確率を求めよ。

答えは分数でもよい。

3

△ＡＢＣの３つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃより対辺に下した垂線をＡＤ，ＢＥ，ＣＦとし，垂心をＨとする。

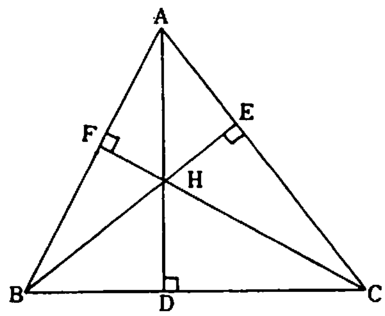
線分ＡＨ，ＢＨ，ＣＨの中点をＰ，Ｑ，Ｒ，辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点をＬ，Ｍ，Ｎとするとき，次の問に答えよ。

(1) 四辺形ＰＱＬＭと四辺形 NLRP は平行四辺形であることを証明せよ。

(2) 四辺形ＰＱＬＭと四辺形 NLRP は長方形であることを証明せよ。

(3) ９点Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｌ，Ｍ，Ｎ，Ｐ，Ｑ，Ｒは同一円周上にあることを証明せよ。

（注）　この円を△ＡＢＣの〝９点円〞又は〝オイラー円〞という。



4

定義域が集合Ａである関数 f に対して，$f(a)=a$ となる $a \in$ Ａを，f の不動点という。

今，〔0,1〕で $\{t|0 \leqq t \leqq 1\}$ なる集合を表わすことにするとき，次の問いに答えよ。

(1) 〔0,1〕を定義域とし，値域が〔0,1〕に含まれる関数で，$x=\frac{1}{3}$ を唯一つの不動点としてもつ関数の例を２つあげよ。

(2) 定義域が〔0,1〕の関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について，値域が〔0,1〕，かつ〔0,1〕内に唯一つの不動点をもっための，a, b, c の条件を求め，このときの不動点を b を用いて表わせ。

（ただし，$a>0$）

昭和60年度（昭和61年１月15日実施）

第４回
北海道高等学校数学コンテスト

解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

第 1 部

1

> 現在使用しているグレゴリオ暦では西暦年数が4で割り切れ,100で割り切れない年をうるう年としています。ただし400で割り切れる年は,うるう年です。(例, 1,900年は平年,2,000年はうるう年2,100年は平年)また平年は365日,うるう年は366日,1.3.5.7.8.10.12月は31日,4.6.9.11月は30日, 2月は平年は28日, うるう年は29日です。
>
> (1) 今年 (1986年) の1月1日は, 水曜日でした。来年の1月1日は何曜日ですか。また今年の5月1日は何曜日ですか, 同じ年の1月1日と5月1日は曜日が一致することはありうるでしょうか。来年以降も考えて下さい。
>
> (2) ゴールデンウィークの4月29日, 5月3日, 5月5日は祝日です。日曜日が祝日または, その前後にくると連休になります。それではゴールデンウィークに連休がまったく無い年はあるでしょうか。もしあるならば, 次は西暦何年ですか。その理由も書いて下さい。
>
> (3) 曜日は何年を周期に繰返していますか。その最小周期を理由とともに書いて下さい。

1

着眼点

① 曜日は, 7日ごとに繰り返す, よって365÷7=52余り1より平年では曜日が1日ずれる。

5月1日が1月1日よりかぞえて通算何日目になるかがわかれば, その数を7で割り, 曜日に対応させれば求めることができる。

② 4/29 4/30 5/1 5/2 5/3 5/4 5/5
金 土 日 月 火 水 木
5月1日が日曜日以外は連休ができる。よって, 5月1日が日曜日になる年を探す。

③ グレゴリオ暦の規則より, 周期は400年の倍数である。

解答例

① 今年は平年, 1年は365日, よって365÷7=52余り1, これより来年の1月1日は曜日が1日ずれて木曜日である。

また, 5月1日は1月1日より数えて, 31+28+31+30=120より通し番号をつけると121日目である。

(121－1)÷7=17余り1から5月1日は木曜日である。

また, 5月1日は1月1日より数えて平年は121日目, うるう年では122日目(121－1)÷7, (122－1)÷7の余りは各々1と2, これより1月1日と5月1日は曜日が一致することはない。

② 4/29 4/30 5/1 5/2 5/3 5/4 5/5
金 土 日 月 火 水 木
左のような曜日のときのみ連休はできない。したがって5月1日が日曜日になる年を考える。

①より1986年の5月1日は木曜日, 1987年の5月1日は金曜日, 1988年はうるう年より2月が29日, よって5月1日は曜日が2つずれ日曜日となる。よって答は, 1988年。

③ グレゴリオ暦の規則により少なくとも最少周期は400年の倍数である,400年間の日数を調べる。

(400年間の日数)=(1年の日数)×(400年)
+(4で割り切れる年数)－(100で割り切る年数)
=365×400+100－3
=146097
=20871×7 これは7で割り切れる。

よって, 曜日は400年を周期として繰り返す。

2

> △ABCがあって角Aが直角である。角Bの2等分線をひき, 辺ACとの交点をD, Aから対辺BCに垂線をひき, 交点をHとする。
>
> 直線AHと直線BDの交点をEとし, Eを通り, BCに平行な直線と, 辺ACとの交点をFとする。
>
> 問1 上の文章の意味を表わす図をかけ。(free hand でもよい)
>
> 問2 AD=AEを証明せよ。
>
> 問3 AD=CFを証明せよ。
>
> (注意) 問2, 問3の証明に必要な図は, 問1の図に加えてもよいが, なるべくは問題別に図を書け, free hand でよいから説明に必要な図は, ハッキリ書いておけ。

2

着眼点

① ∠BAH＝∠Cであることを始めに確認しておくこと。

② AD，AEの等しいことは直接には面倒であるから，∠ADE＝∠AEDとなることを見つけて，それによること。

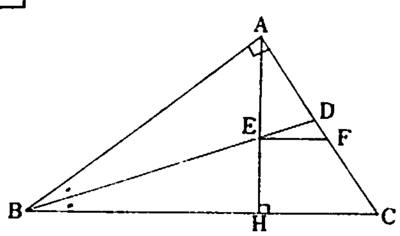
③ 三角形の外角と内角の関係，
直角三角形では直角でない他の2内角の和が90°になること。

④ ADとCFの比較は直接にはできない。CF を平行移動するのがよいが，外にも色々方法がある。2等分線を軸として△ABEを折り かえすのが平行移動と同様によい。

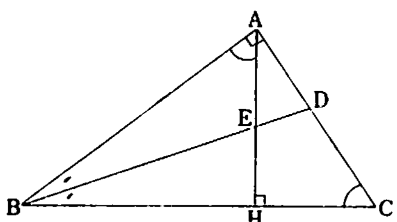
⑤ 座標を使っても解けるが，座標軸のとり方が重要，どうしても計算が複雑になる。

解答例

問1

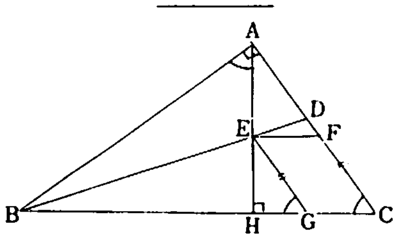


問2



∠ABC＝βとおけば
∠C＝90°－β
∠BAH＝90°－β
∠BAH＝∠C
∠ABD＝∠DBC＝$\frac{1}{2}\beta$
△AEDで∠AEDと∠ADEを比べる
∠ADB＝∠DBC＋∠C＝$\frac{1}{2}\beta+90°-\beta=90°-\frac{1}{2}\beta$　　∠AED＝∠EBA＋∠BAE
＝$\frac{1}{2}\beta+90°-\beta=90°-\frac{1}{2}\beta$
∴∠ADB＝∠AED
∴AD＝AE　Q.E.D.

問3



線分FCをBCに沿ってFがEに重なるまで平行移動し，Cの移った点をGとすると
∠EGB＝∠Cとなる。
△ABEと△GBEで
∠ABE＝∠GBE
∠EGB＝∠C＝∠BAE
BEは共通
∴△ABE≡△GBE
∴EG＝EA＝DA
一方EG＝FC　であるから
AD＝CF　　　　Q.E.D.

(注)　問2，問3の証明の仕方はいくらでもある。ここには1つの例だけあげたのである。

3

整数値 m，n に対して，次のようにして$f(m, n)$が定義される。
1°　$f(0, n)=n+1$
2°　$f(m, 0)=f(m-1, 1)$　　$(m\geqq1)$
3°　m，$n\geqq1$ のとき，$f(m, n)=f(m-1, f(m, n-1))$
このとき次の値を求めよ。
例えば$f(0,3)=3+1=4$である。
(1)　$f(1,0)$
(2)　$f(1,3)$，$f(1,n)$
(3)　$f(2,3)$

3

着眼点

$f(m, n)$の形の関数を二変数関数という。一般の二変数関数は大変複雑な形になるが，この場合は二つの数をひとつずつ小さくすることによって1°の形に帰着できる。基礎解析の「帰納的定義」を知っているとヒントになるが，もちろん知らなくてもできる。

解答例

(1)　$f(1,0)=f(0,1)$　　2°より
$\quad=1+1=2$　　1°より
(2)　$f(1,3)=f(0,f(1,2))$　　3°より
$\quad=f(1,2)+1$
$\quad=f(0,f(1,1))+1$　　3°より
$\quad=f(1,1)+1+1$　　1°より

$=f(0,f(1,0))+2$　　3° より

$=f(1,0)+1+2=2+3=5$

$f(1,n)=f(0,f(1,n-1))$　　3° より

$=f(1,n-1)+1$

$=f(0,f(1,n-2))+1$　3° より

$=f(1,n-2)+2$

=……以下同様にして，

$f(1,n)=f(1,0)+n=n+2$ ……4°

(3) $f(2,3)=f(1,f(2,2))$ …………3° より

$f(2,2)=f(1,f(2,1))$ …………3° より

$f(2,1)=f(1,f(2,0))$ …………3° より

$f(2,0)=f(1,1)$

$=f(0,f(1,0))$

$=f(0,2)=2+1=3$

よって　$f(2,1)=f(1,3)=5$ ……4° より

$f(2,2)=f(1,5)=5+2=7$ ……4° より

$f(2,3)=f(1,7)=7+2=9$ ……4° より

4

互いに異なる3個の0でない数の集合Aがあって，Aの要素のどの2個（重複をゆるす）の積もまたAの要素であるという。

(1) $A=\{a,b,c\}$ とするとき，$\{a^2,ab,ac\}=A$ を示せ。

(2) $A\ni 1$ であることを示せ。

$1\in A$ より，$A=\{1,\alpha,\beta\}$ と表せる。このとき $\alpha\beta$ の値を調べて

(3) 集合Aを決定せよ。

4

着眼点

この問題は「乗法に関して閉じている」「要素の個数は3個である」という条件が与えられた集合を決定する問題である。ポイントは(1)で，この2つの集合の相等（すなわち2つの集合の要素はすべて一致する）からa，b，cについての情報をとり出していくのである。この方法は(3)でも使われる。

解答例

(1) $A=\{a,b,c\}$ で，Aは積に関して閉じているから，$a^2\in A$，$ab\in A$，$ac\in A$ である。ところで，$a^2-ab=a(a-b)$ で $a\neq 0$，$a\neq b$ より $a^2\neq ab$。

$ab-ac=a(b-c)$ で，$a\neq 0$，$b\neq c$ より $ab\neq ac$。

$a^2-ac=a(a-c)$ で，$a\neq 0$，$a\neq c$ より $a^2\neq ac$

従って，a^2，ab，ac は互いに異なる0でないAの3つの要素だから $\{a^2,ab,ac\}=A$ である。

(2) $\{a^2,ab,ac\}=A\ni a$ より $a^2=a$，あるいは $ab=a$ あるいは $ac=a$ のいづれか1つは必らず成り立たなければならない。

$a^2=a$ とすると $a(a-1)=0$，$a\neq 0$ より $a=1$

$ab=a$ とすると $a(b-1)=0$，$a\neq 0$ より $b=1$

$ac=a$ とすると $a(c-1)=0$，$a\neq 0$ より $c=1$

従って，a，b，cのうちどれか1つは，1でなければならない。　$A\ni 1$。

(3) $A=\{1,\alpha,\beta\}$ と表せる。(1)より，$\{1,\alpha,\beta\}=\{\alpha,\alpha^2,\alpha\beta\}$ である。

すなわち，$\{1,\beta\}=\{\alpha^2,\alpha\beta\}$。従って，$\alpha\beta=\beta$ or $\alpha\beta=1$ のいずれかである。

$\alpha\beta=\beta$ とすると，$\alpha=1$ か $\beta=0$ となり，不合理。

$\alpha\beta=1$ とすると，このとき $\beta=\alpha^2$ でなければならない。$\beta=\alpha^2$ を $\alpha\beta=1$ に代入して，$\alpha^3=1$

$\therefore(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$　$\alpha\neq 1$ より $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき $\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

と α，β が求まる。

よって，

$$A=\left\{1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

である。

第 2 部

1

p進法で，$a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots\cdots a_2\ a_1\ a_0\ _{(p)}=a_n\times p^n+a_{n-1}\times p^{n-1}+a_{n-2}\times p^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\times p^2+a_1\times p+a_0$の意味です。例えば$abcd_{(p)}=a\times p^3+b\times p^2+c\times p+d$となります。ただし，$0<a_n\leqq p-1$，$0\leqq a_{n-1}$，$a_{n-2}$，$\cdots\cdots a_2$，$a_1$，$a_0\leqq p-1$とします。

電子計算機が活躍するようになってから，2進法が大きく注目されるようになりました。しかし，この2進法は少し大きな数になるとすぐに桁数が増えてゆくのが難点です。この為2進法を10進法に直す場合によく桁数の読み違いからくるミスが少くありません。そこで，2進法を1度8進法とか4進法に直して，それから10進法に直す方法で，しかも便利な方法について考えてみましょう。

(注) 何進法の書き表し方であるかをはっきりさせる為に，$abcd_{(p)}$ のように $_{(p)}$ を用いる。また，1 2 3のように $_{(p)}$ が付けられていない場合のみ10進法ということにする。

(1) 1 1 0 1 1 0 1 1 $_{(2)}$を4進法で表してみよ。その結果がこの数に図のような区切りを入れて1つ1つの区切りが2進法で表す10進数を書き込む。
(例えば，1 1 | 0 1 | 1 0 | 1 1の10＝1×2＝2）のと一致することを確かめよ。
1 1 | 0 1 | 1 0 | 1 1

(2) 1 1 0 1 1 0 1 1 $_{(2)}$を8進法で表す場合，(1)の考え方を利用して3桁毎に区切りを入れ，1つ1つの区切りが2進法で表す10進法を書き並べるとよいことを(1)と同様に確かめよ。

(3) (2)で確かめたことを，数式の上で証明せよ。
(注) 一般的に文字式で証明してもよいし，$11011011_{(2)}$を使って証明してもよい。

(4) $abcdef_{(3)}\ (a\neq 0)$を9進法に直す場合も2桁毎の区切りを入れて
$ab_{(3)}=p$，$cd_{(3)}=q$，$ef_{(3)}=\gamma$とするとき，
$abcdef_{(3)}=pq\gamma_{(9)}$となることを証明せよ。

1

着眼点

2進法を4進法，8進法に直すには$4=2^2$，$8=2^3$より2^2，2^3にならなければ位が1つ上らないことに注意せよ。

記数法の面白さに注目してほしい。

解答例

(1) $11011011_{(2)}=219$
$219=3123_{(4)}$
ところで，区切りを入れた場合
$11\,|\,01\,|\,10\,|\,11_{(2)}=3123_{(4)}$となる

11	01	10	11
⋮	⋮	⋮	⋮
3	1	2	3

```
4 )219
4 ) 54 ……………… 3
4 ) 13 ……………… 2
     3……………… 1
```

(2) $11011011_{(2)}=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1=128+64+16+8+2+1=219$,

```
     27
8 ) 219
    16
    ──
     59
     56
     ──
      3
```

```
8 )219
8 ) 27 ……… 3
     3 ……… 3
```

$219=333_{(8)}$
$11\,|\,011\,|\,011_{(2)}=333_{(8)}$

11	011	011
⋮	⋮	⋮
3	3	3

(3) $11011011_{(2)}=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1=(2+1)2^6+(2+1)2^3+3$
$=3\times8^2+3\times8+3=333_{(8)}$

(4) $abcdef_{(3)}=a\times3^5+b\times3^4+c\times3^3+d\times3^2+e\times3+f$
$=(3a+b)\times3^4+(3c+d)3^2+3e+f$
$=(3a+b)\times9^2+(3c+d)9+3e+f$
ところで，$0<a\leqq2$，$0\leqq b, c, d, e, f\leqq2$であるから，

$0<3a+b\leqq8$ $0\leqq3c+d\leqq8$ $0\leqq3e+f\leqq8$ より
$0<p\leqq8$ $0\leqq q\leqq8$ $0\leqq r\leqq8$ であるから
従って，$(3a+b)\times9^2+(3c+d)\times9+3e+f=p\times9^2+q\times9+r=\underline{\underline{pqr_{(9)}}}$

2

ジョーカーをのぞいたトランプのカード52枚から5枚のカードをとったとき，次のように呼ぶことにする。(ただし J＝11，Q＝12，K＝13，A＝1）

(1) 5枚のカードのなかに，同じ数字のカードが3枚あるとき。
(スリーカード)

(2) 5枚のカードのなかに，同じ数字のカードが4枚あるとき。
(フォーカード)

(3) 5枚のカードの数字がすべてつづいているとき。
例えば，8，9，10，11，12（ストレート）
今52枚のカードをよくまぜてつみあげ，上から5枚とったところ。「◇5，♡5，◇7，♧8，♡9」であった。

(A) 「◇5，◇7，♧8，♡9」を残し，「♡5」をのぞき，つみ上げてあるカードから1枚とり5枚とするとき（ストレート）となる確率を求めよ。

(B) 「◇5，♡5」を残して他のカードを取りのぞき，つみ上げてあるカードから3枚とり，5枚とするとき，

イ) （フォーカード）となる確率を求めよ。

ロ) （スリーカード）となる確率を求めよ。

ハ) （スリーカード）または（フォーカード）となる確率を求めよ。

答えは分数でもよい。

2

着眼点

書き出して考えるとよい。
(スリーカード)となる例として5,5,5　7,7,7　1,1,1 となる確率に注意すべきである。

解答例

A) 5，7，8，9であるから6のカードであるとよい。このとき6のカードは47枚中に4枚入っている確率は$\frac{4}{47}$。

B) イ) 5，5であるから，5が2枚と5でないカード1枚であるとよい。

1枚目	2枚目	3枚目	
			$\frac{2}{47}\times\frac{1}{46}\times\frac{45}{45}$
5	5	×	
5	×	5	$\frac{2}{47}\times\frac{45}{46}\times\frac{1}{45}$
×	5	5	$\frac{45}{47}\times\frac{2}{46}\times\frac{1}{45}$

$\left.\right\} 3\times\frac{2\times45}{47\times46\times45}$

$\frac{3}{1081}$

ロ) 5，5であるから5が1枚と5でないカード2枚であるか，3枚とも5以外の同じカードであるとよい。

○

1枚目	2枚目	3枚目	
			$\frac{2}{47}\times\frac{45}{46}\times\frac{44}{45}$
5	×	×	$\frac{45}{47}\times\frac{2}{46}\times\frac{44}{45}$
×	5	×	
×	×	5	$\frac{45}{47}\quad\frac{44}{46}\quad\frac{2}{45}$

$\left.\right\} \frac{132}{1081}$

○ 7，8，9のカードが3枚出る。

$3\times\frac{3}{47}\times\frac{2}{46}\times\frac{1}{45}=\frac{1}{5405}$

○ 1，2，3，4，6，10，11，12，13のカードが3枚出る。

$9\times\frac{4}{47}\times\frac{3}{46}\times\frac{2}{45}=\frac{12}{5405}$

よって求める確率$\frac{132}{1081}+\frac{1}{5405}+\frac{12}{5405}=\frac{673}{5405}$

ハ) イ)，ロ)より

$$\frac{3}{1081}+\frac{67}{5405}=\frac{688}{5405}$$

3

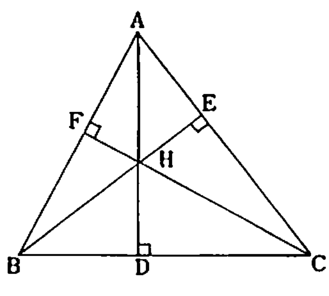
△ABCの3つの頂点A，B，Cより対辺に下した垂線をAD，BE，CFとし，垂心をHとする。
線分AH，BH，CHの中点をP，Q，R，辺BC，CA，ABの中点をL，M，Nとするとき，次の問に答えよ。

(1) 四辺形PQLMと四辺形NLRPは平行四辺形であることを証明せよ。

(2) 四辺形PQLMと四辺形NLRPは長方形であることを証明せよ。

(3) 9点D，E，F，L，M，N，P，Q，Rは同一円周上にあることを証明せよ。

(注) この円を△ABCの“9点円”又は，“オイラー円”という。



3

着眼点

　中学校で学んだ幾何教材の内容を，どの程度理解し，それを活用できるかをしらべる。

1）　中点連結の定理
2）　平行四辺形の性質
3）　直径と円周角の関係

解答例

証　明

(1)

（イ）　△ABHでAP＝PH，BQ＝QH 二辺中点連結定理から

$$PQ \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AB \quad \cdots\cdots ①$$

△ABCでAM＝MC，BL＝LC同様にして

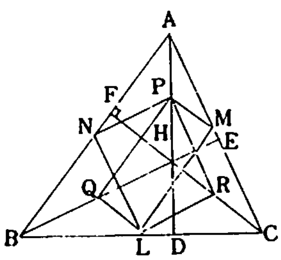
$$LM \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AB \quad \cdots\cdots ②$$

①，②からPQ $\overset{/\!/}{=}$ LM 従って

四辺形PQLMは平行四辺形である。

（ロ）　又，△AHCでAP＝PH，AM＝MC 二辺中点連結定理から

$$PR \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AC \quad \cdots\cdots ③$$



△ABCでAN＝NB，BL＝LC で同じく

$$NL \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AC \quad \cdots\cdots ④$$

③，④から

PR $\overset{/\!/}{=}$ NL

従って，四辺形NLRPは平行四辺形である。

(2)

（イ）　CF⊥ABそしてAB∥PQより

CF⊥PQ ……………………①

又，PM∥HC（∵AP＝PH，AM＝MC）

即ちPM∥CF……………………②

①，②よりPM⊥PQ

即ち，∠QPM＝∠R 従って，平行四辺形PQLMは長方形。（平行四辺形は対角が等しく，同傍内角は補角をなす）

（ロ）　BE⊥ACそしてPR∥ACより

BE⊥PR ……………………③

又，NP∥BH（∵AN＝NB，AP＝PH）

よりNP∥BE ……………………④

③，④より　NP⊥PR

即ち，∠NPR＝∠R　従って，平行四辺形NLRPは長方形。

(3)

（イ）　長方形 PQLMで4点P，Q，L，Mは同一円周上にあり，(PLを直径)（PL＝QM 対角線は互に他を2等分するから中心は同じ）PLを直径とする円とQMを直径とする円周は同一である(中心が対角線の交点で半径は$\frac{1}{2}$直径)

∠PDL＝∠RだからDはPLを直径とする円周上にある。

∠QEM＝∠RだからEは QM を直径とする円周上にある。故にD，E，L，M，P，Qは同一円周にある。

（ロ）　長方形NLRPで4点N，L，R，Pは同一円周上にあり(PLを直径) PLを直径とする円とNRを直径とする円は同一。従って，PL，MQ，NRを直径とする円は同一。

又，∠RFN＝∠RよりFはNRを直径とする円周上にある。R，NもPLを直径とする円周上にある。

（イ），（ロ）より9点D，E，F，L，M，N，P，Q，Rは同一円周上にある。

4

定義域が集合Aである関数f に対して，$f(a)=a$となる$a\in A$を，f の不動点という。今，$[0,1]$ で $\{t \mid 0\leqq t\leqq 1\}$ なる集合を表わすことにするとき，次の問いに答えよ。

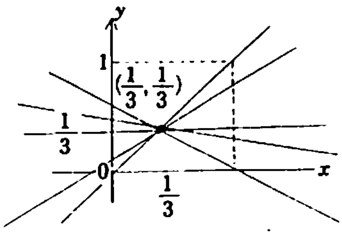
(1)　$[0,1]$ を定義域とし，値域が$[0,1]$に含まれる関数で，$x=\frac{1}{3}$を唯一つの不動点としてもつ関数の例を2つあげよ。

(2)　定義域が$[0,1]$の関数$f(x)=ax^2+bx+c$ について，値域が$[0,1]$，かつ$[0,1]$ 内に唯一つの不動点をもつための，a, b, cの条件を求め，このときの不動点をb を用いて表わせ。（ただし，$a>0$）

4

着眼点

(1)



グラフが直線になる関数に限って考える。

上図のように点$(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$を通る直線を点$(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$を固定して，回転させて考えればよい。

あとは値域が[0,1]内に含まれるようなものをえらべばよい。

(2) 不動点とは，$y=f(x)$と$y=x$との交点であると考えられる。したがって，[0.1]内で$y=f(x)$と$y=x$が唯一つの交点をもつような条件を考えればよい。

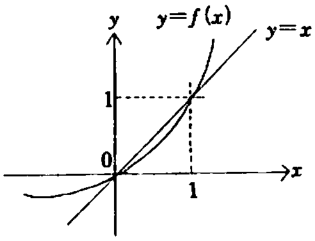
解答例

(1) $f(x)=\frac{1}{3}$，$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\ (0\leqq x\leqq 1)$などを考えればよい。

(2) $f(x)$の軸の方程式は$x=-\frac{b}{2a}$である。

fが[0,1]の上への関数であるためには次の4つの場合が考えられる。

(イ)

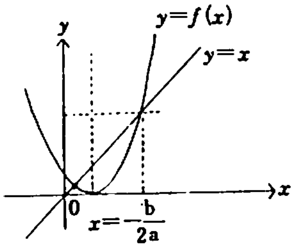


$-\frac{b}{2a}<-1$

$f(0)=0$

$f(1)=1$

(ロ)



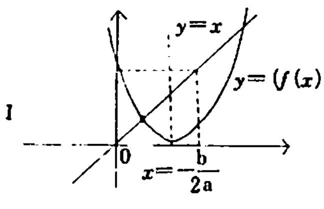
$0<-\frac{b}{2a}<1$

$0\leqq f(0)=c\leqq 1$

$f(1)=a+b+c=1$

$b^2-4ac=0$

(ハ)



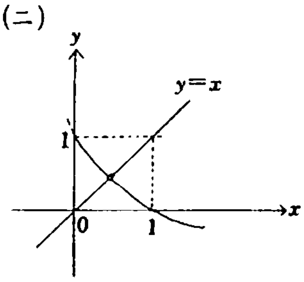
$0<-\frac{b}{2a}<1$

$f(0)=c=1$

$0\leqq f(1)=a+b+c<1$

$b^2-4ac=0$

(ニ)



$-\frac{b}{2a}>1$

$f(0)=c=1$

$f(1)=a+b+c=0$

ところが(イ)，(ロ)の場合は$y=f(x)$と$y=x$との交点が2つあるから不適。よって，(ハ)，(ニ)の場合だけを考えればよい。

(ハ) の場合

$$\begin{cases} c=1 & \cdots\cdots① \\ 0\leqq a+b+1<1 & \cdots\cdots② \\ b^2=4a & \cdots\cdots③ \\ 0\leqq -\frac{b}{2a}\leqq 1 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

②，③より$0\leqq\frac{b^2}{4}+b+1<1$　$\therefore -4<b<0$ …⑤

③，④より$0\leqq\frac{-2b}{b^2}\leqq 1$　$\therefore b\leqq -2$ …⑥

⑤，⑥より　$-4<b\leqq -2$ ……⑦

よって求める条件は

$b^2=4a$，$-4<b\leqq -2$，$c=1$

不動点は

$x=\frac{b^2}{4}+bx+1$

$\therefore b^2x^2+4(b-1)x+4=0$

$\therefore x=\frac{2-2b\pm 2\sqrt{1-b}}{b^2}$

$x\in[0,1]$だから

$x=\frac{2-2b-2\sqrt{1-b}}{b^2}\ (-4<b\leqq -2)$

(ニ) の場合

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}>1 & \cdots\cdots① \\ c=1 & \cdots\cdots② \\ a+b+1=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③，①より　$-2<b$

さらに$a>0$より$b<0$

$\therefore -2<b<0$ ……④

同様に　$0<a<1$

よって，条件は　$0<a<1$，$-2<b<0$，$a+b+1=0$，$c=1$

不動点

$$x=(-b-1)x^2+bx+1$$

$$(b+1)x^2-(b-1)x-1=0$$

$a>0$ より　$b+1\neq 0$

$$\therefore x=\frac{(b-1)\pm\sqrt{(b-1)^2+4(b+1)}}{2(b+1)}$$

$$=\frac{b-1\pm\sqrt{b^2+2b+5}}{2(b+1)}$$

$x\in[0,1]$ より

$$x=\frac{b-1+\sqrt{b^2+2b+5}}{2(b+1)}$$

$$\left(\because\ \begin{array}{l} a>0 \text{ より} \\ b+1<0 \end{array}\right)$$

第 4 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

昭和61年1月15日(水)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第４回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　　高　田　昭　二

昭和58年に初めて実施されたこの「数学コンテスト」も，回を重ね，第４回目になりました。参加者も回を追う毎に増え，今回は，全道各地から37校，740名の申込みがありました。あいにく，折悪しく猛吹雪のために，交通遮断などの事故がありましたが，参加者の意欲と関係各位のご協力により，無事に終えることができました。心から感謝申し上げます。

先日，中学校の新「学力調査」の結果が文部省から発表されました。それによりますと，12年前実施のときにくらべて，正答率も上昇し達成度が高まっているものの，相変らず，総合的な判断力，筋道を立ててものを考える力，数学的な考え方などが弱いということであります。

私どもが実施しておりますこのコンテストは，こうした弱点をなくするために，単なる問題処理能力の習得にとどまらず，数学における基本的な概念，原理，法則などの理解を深めるとともに，ものごとを抽象化，体系化し，論理的に思考する能力を高めることを目的としています。決して大学入試を念頭においたものではありませんが結果として，成績優秀者の全員が，全国的に難関といわれている大学に合格し，それぞれ所を得ていることは，非常に喜ばしいことであります。

このコンテストが一層充実し，道内の高校生に目標を与え，自己啓発の刺激となり優秀な人材が輩出して，本道のレベルの向上に寄与することができれば，これに過ぎる喜びはありません。

終わりになりましたが，初回からご協賛いただいている福武書店ならびに，ご後援下さいました北海道教育委員会，北海道高等学校長協会，北海道新聞社に心から厚く御礼申し上げます。

●成績優秀者

菊池直樹	寺尾貴道	佐藤竜人	遠藤礼子
大島道子	福本　潤	松本英樹	松田恭幸
三浦弘和	寒川　孝	丸尾和幸	宇野弘絵
高畑義啓	上野弘人	高島英典	白坂智英
酒井伸一郎	田中寛明	佐々木信一	岩渕康男

第４回　北海道高等学校数学コンテスト

度数分布表(I)

	I				II			
点数	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
0	31	1	34	245	195	100	100	318
1	1				3			3
2	15		2	5	5	15	40	4
3	21		9	105	3	217	15	1
4	11			2	20	13	4	38
5	33	56	25	1		31	7	4
6	44	20	7	5	1	6	12	1
7	10	31	2	8	3	6	4	1
8	45	19	19	3	17	2	43	36
9	3	3	14	21	1	6	3	7
10	22	12	26	8	1	14	3	4
11	3	2	12	1	9		6	2
12	13	8	9	4	5	17	6	2
13	5	16	29	3	1		16	
14	27	10	17	3	2		21	3
15	3	69	38		41	1	7	4
16	113	53	21	1	4	1	45	2
17	1	36	5	1	3	2	4	
18	25	26	19	2	17		10	2
19		2	1	4	5		5	
20		19	33	2	36	1	13	
21		1	2		25		29	
22		5	21	1	3		7	
23	1	13	45		30		17	
24		1	8	3			3	
25	5	29	34	4	2		12	
人数	432	432	432	432	432	432	432	432
合計	4344	5942	6198	1236	3666	1465	4271	806
平均	10.0	13.7	14.3	2.8	8.4	3.3	9.8	1.8
S.D	5.8	5.9	7.4	4.9	9.4	3.2	8.2	3.6

度数分布表(II)

点数	I	II	点数	総点
100～96			200～191	
95～91	1		199～181	
90～86	2		180～171	
85～81	2		170～161	1
80～76	2	2	160～151	2
75～71	3	3	150～141	5
70～66	14	5	140～131	3
65～61	22	8	130～121	4
60～56	30	7	120～111	19
55～51	37	13	110～101	29
50～46	41	32	100～91	20
45～41	51	20	90～81	33
40～36	58	22	80～71	41
35～31	44	23	70～61	47
30～26	28	27	60～51	51
25～21	37	34	50～41	57
20～16	15	45	40～31	49
15～11	7	47	30～21	27
10～6	4	31	20～11	10
5～0	2	81	10～0	2
人数	432	432		432
合計	17720	10208		27928
平均	41.0	23.6		64.6
S.D	15.3	18.3		30.0

第 1 部

1

> 現在使用しているグレゴリオ暦では西暦年数が4で割り切れ,100で割り切れない年をうるう年としています。ただし400で割り切れる年は,うるう年です。(例,1,900年は平年,2,000年はうるう年2,100年は平年)また平年は365日,うるう年は366日,1.3.5.7.8.10.12月は31日,4.6.9.11月は30日, 2月は平年は28日, うるう年は29日です。
>
> (1) 今年 (1986年) の1月1日は, 水曜日でした。来年の1月1日は何曜日ですか。また今年の5月1日は何曜日ですか, 同じ年の1月1日と5月1日は曜日が一致することはありうるでしょうか。来年以降も考えて下さい。
>
> (2) ゴールデンウィークの4月29日, 5月3日5月5日は祝日です。日曜日が祝日または,その前後にくると連休になります。それではゴールデンウィークに連休がまったく無い年はあるでしょうか。もしあるならば, 次は西暦何年ですか。その理由も書いて下さい。
>
> (3) 曜日は何年を周期に繰返していますか。その最小周期を理由とともに書いて下さい。

講 評

日常何げ無く使用している暦の問題であり, ほとんどの人が手をつけていました。日数を7で割った余りと曜日が対応することがわかっていれば, 計算間違いさえしなければ正解が得られていました。しかし, 正解の説明には, 簡潔で説得力のある解答は少数でした。自分以外の人にも明らかにわかるような答案を書て下さい。(1)(2)については以上ですが, (3)はやはり, 正答者は少数でした。周期という用語を単に1年の曜日が一致することと考えて5年とした例が多数ありました。また, やや惜しい解答例としては, 曜日が7で繰り返し, うるう年が4で繰り返すことより, 4×7=28年という解答例もありました。28年間に西歴年数が100の倍数が存在しない場合は28年で曜日は繰り返します。ここでは, 石黒洋二君の(3)の解答例を示します。

〔解答例〕

365を7で割った余りは1

今, 1年から400 n 年までの間にうるう年は,

$$\frac{400n}{4}-\frac{400n}{100}+\frac{400n}{400}=100n-4n+n=97n \quad (n\text{は整数})$$

より, 97n回ある。

1年から400n 年までに1月1日の曜日は400n+97n=497n 日だけ後にずれる。

497=7×71だから, n=1のとき最小の周期となる。最小周期400年

〔追記〕

暦の問題は, 1年が, 365, 2422日であることより生じます。4年に1度うるう年で修正していますが, 365, 25日と実際の1年との誤差が年数がたつと大きくなるので, これを修正するために, 100のの倍数と400の倍数の規則が出来ました。しかし, この規則でも4000年に1日ずれてくるので, グレゴリオ暦では, 西暦年数が4000倍数は平年と定めています。そうすると, この(3)の問題は厳密に考えると周期は無くなります。しかし, あと2000年間は, 上の規則を使うことも無いので, 実用的には, あまり有用では無いようです。この問題を作成した後に, 『大学の数学』12月号に淡中先生の暦ーカレンダーという記事が載っているのを教えてもらいました。興味のある方は, 是非読んで下さい。同じくこの問題の印刷後、国会で5月4日祝日法案が通過したので(2)の連休の問題も, 現実の問題としては, 意味が無くなります。もっとも, 解答の中には, 天皇誕生日にまで言及している人がいましたが, こうなると数学の問題としては手に負えなくなります。現実と数学の問題のギャップと, 問題作成の難しさを痛感しました。暦は, シーザーの例を持ち出すまでも無く, 人間の歴史や政治と深く関りを持っているようです。(閑話休題) 最後に西歴n年m月d日の曜日は次のZeLLerの公式でわかるそうです。(ただし,

1583≦n≦3999, 現行のグレゴリオ暦は1582年10月15日より実施)

$c=\left[\frac{n}{100}\right]$　　$y=n-100c$, ([　]はガウス記号で実数の小数点以下を切り捨てて整数にしたもの) とおくと,

$$W=\left[\frac{c}{4}\right]-2c+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{26(m+1)}{10}\right]+d-1$$

このWを7で割った余りが, 0,1,2……に対応して, 日曜日, 月曜日, ……となるそうです。コンピューターの万年暦や, バイオリズムの計算等にこの公式が使用されていることもあるそうです。私達の日常生活にも多くの数学的な問題が隠れているようです。

2

> △ABCがあって角Aが直角である。
> 角Bの2等分線をひき，辺ACとの交点をD，
> Aから対辺BCに垂線をひき，交点をHとする。
> 直線AHと直線BDの交点をEとし，Eを通り
> BCに平行な直線と，
> 辺ACとの交点をFとする。
> 問1　上の文章の意味を表わす図をかけ。
> 　　(frec hand　でもよい)
> 問2　AD＝AE を証明せよ
> 問3　AD＝CF を証明せよ

Ⅰ．配点について

問1．5点　問2，問3　それぞれ10点

問1の図は文章の意味を正しく把握しているかどうかを見るものであるから，あまりにラフだと思われるものは別として，点を与えることを主とした。従ってAB＝ACに見えるのも減点はしなかった。

問2，問3への点の与え方は主観的になるのは仕方がないが，出来るだけ公平を期した。

Ⅱ．講　評（一般的）

① 〝図みたらワカルべ〟的態度は最悪，問題に与えられた点はAからFまで7点，それに追加する点（線でも）には必らず説明をつけなければならない。勝手に説明無しで図の中に点を入れて〝図みたらワカルべ〟が，いけない。

② 角を一文字で表わすことについて特に法律できまっているわけでないが慣習として知って居てほしい。ローマ小文字で表わすときは右肩に度の印○をつけること。これがないと直線になる。高校生ならギリシヤ小文字1つの方が，形もよいし混乱しない。後に行って平面の表わし方にもなるが，それはその時とする。それから図の中に示した），））， ●， ○などを説明文の式表示に使わないこと。

③ notation ＝，≡，∽の混乱，
△ABC，△DEFを例にして

ⅰ）△ABC＝△DEF
これは面積相等を示す。点の順序や形には無関係である。これで合同と思っているものが居る。

ⅱ）△ABC≡△DEF
これは合同を示す。この式では点の順序が重要
対応点；AとD，BとE，CとF
辺の長さ；AB＝DE，BC＝EFなど
角の相等；∠ABC＝∠DEFなど
上の合同式のような関係にあるとき
△ABC≡△EDFなどは誤り，
しかし△BAC≡△EDFならよろしい。
また△ABC≡△DEFなら
△ABC＝△DEF；△ABC∽△DEFは正しいが，その逆は成り立たないことに注意。

ⅲ）△ABC∽△DEF
これは相似を示す。ここでも点の順序が重要なことと対応点は≡のときと同じである。
この関係では∠ABC＝∠DEFなどAB：DE＝BC：EF＝CA：FDとなるがAB＝DEなどは成り立たない。

ⅳ）〝△ABCは△DEFと合同である〟
〝△ABCは△DEFと相似である〟
の文章は，点の順序（対応点，対応角，対応辺）について確完していないので，いけない。必らず三，∽のnotation を使うこと。
実際にこれをLoose に使うものが居た。

④ 特別な数値での解答
これはほんの数名であるが，自分の図から勝手にAB＝ACとか∠B＝60° などにした。
これらは正解に対して何万分の一か，もしかして何億分の一だけしか価値が無いことになる。

⑤ 相似比と面積比；中線と2等分線
面積比は対応辺の2乗の比となることを忘れているものがある。またmedian とbisector を混同しているものも居た。

Ⅲ．講　評　　問題別に

以下で昭和61年1月15日実施当日配布したパンフレット〝解答と解説〟を引用するときには単に〝解説〟と略記するので予め了承を乞う。

問1．形状

色々あったが最も多いのは答案用紙の下のへりに平行にBCをかき，上部に直角頂点Aをおくのであって，次は直角頂点が平行線の左端か右端にくるようにしたものであった。これらは図に安定感を持たせるもので成る程と思った。殆んど全部がきれいに書いて居た。AB＝ACにみえるもの可成あったがこれは減点しない。何故かというと〝みえる〟は〝等しい〟と違うからである。然しできるだけ一般形で書くことをすすめる。現にその為にAB＝ACときめて失敗したものもあった。∠Bのbisectov をここでfree hand でうまくかく方法があるのだが，紙面の都合で省略する。

問2

〝解説〟p.2着眼点①②にある通り①の計算∠BAH＝∠Cのきめ方は直ぐに出来る。これを確定しておけば楽になる。

ただ，問3との関連としては，ここでEを通ってACに平行線やDからBCに垂線をひいたりして証明しておけば問3の証明に役立って楽になる。DからBCに垂線をひいて問3の証明にうまく使った2名は素晴らしいと思った。何れにしても問2は中学校の練問にあるもので正答が大多数であったのは当然であるが，出題者はここで受験生の精神安定を計ったつもりである。

問3

第一部としての主眼はこの問3にあった。問1，問2は気を落着かせ問3への意慾を湧かせるのが目的であったが問2で多くの時間を使い，問3を投げるものが多く残念であった。

ここで出題者は〝折り返し〟を期待していた。〝解説〟で問3の解答例として示したのは，平行移動であったが，実は証明の基本方針として〝中点があったら180°回転〟〝bisectorがあったら折り返し（線対称移動)〟を先に試みる…と定まってる，それでここでは〝BDを軸として，BDかBEを一辺とする三角形を折り返す〟ことが最も有効な手段であった。折り返しの候補となる三角形は4つあるが，その中でもまた最良なのは△ABEの折り返しである。このときAの移った点をA′とすれば，A′はBC上にあるAE＝A′E，∠BAE＝∠BA′Eなど証明に使うべき重要事項が準備できて力強い。〝解説〟の解答例で〝線分FCをBCに沿ってFがEに重なるまで平行移動しCの移った点をGとする〟これは〝△ABEをBDを軸にして折り返しAの移った点をGとする〟と同じことになる。

参加者で問3を完全証明した中で結果的には折り返しと同じ手段であったものが大部分でありその中でも圧倒的に多いのは〝DからBCに垂線をひく〟と〝Eを通ってACに平行線をひく〟であった。前者は△ABDの折り返し，後者は△ABE（または△EBH）の折り返しと同じになるが，折り返しよりは手順（step）が多くかかって損である。参加者の取った方法は一般に〝補助線〟と称せられるが，出題者の見解では，図形を移動することによって補助線のように証明に必要な図形は自然に出てくるのである。図形の移動とは〝平行移動（ずらす)〟〝回転移動（まわす）〟〝線対移称動（折り返し)〟〝相例移動（拡大，縮小)〟の4操作であり，そのうち平行，回転の2つは折り返しを何度かくり返すことと同じになる。つまり図形移動の根本操作として折り返しは最重要なものになる。しかも図形移動は中学校で習っている図形関係の事柄（初等幾何という）に必要なだけではなくて高校での〝関数〟〝座標幾何〟〝三角比〟〝ベクトル〟〝行列〟〝二次曲線〟すべてに対して最も有効に（解り易しく）役立つことを強調しておく。

問2，問3での別な解法

① 座標幾何でもできるが，座標を上手にしないとすごく複雑（complex）になる。

② BC＝a，CA＝b，AB＝cとして比を使って長さだけでの処理（treat）もある。

③ 三角関数でのtreatも仲々面白い，これで成功したものが1人居た。

④ vectorで試みたものも1人居たが，これは成功しなかった。長さ，角が入るとvectorは損になる。

⑤ 異色なものが1人。外接円を使ってtreat、これは成功。

⑥ bisectorと相似関係をうまく使って比例で成功したもの1人

問題別を離れて，函館ラサール，岩見沢東のように大勢参加してくれた学校があるが一方には離島奥尻から5人参加し，その中の1人が見事に完全解を果したという例もある。然し評価は点数で為されるので人間性が見失われ勝ちになる。

出題者はこのコンテストにはオリンピックと同じように〝参加することに意義がある〟との所見である。少しでも解答に努力した参加者に心からの感謝と賞讃をささげるものである。

③

> 整数値m，nに対して，次のようにして$f(m, n)$が定義される。
>
> 1° $f(0, n) = n+1$
>
> 2° $f(m, 0) = f(m-1, 1)$ $(m \geqq 1)$
>
> 3° $m, n \geqq 1$のとき，$f(m, n)$
> $= f(m-1, f(m, n-1))$
>
> このとき次の値を求めよ。
>
> 例えば$f(0, 3) = 3+1 = 4$である。
>
> (1) $f(0, 0)$
>
> (2) $f(1, 3)$，$f(1, n)$
>
> (3) $f(2, 3)$

講　評

整数m，n $(\geqq 0)$に対して，$f(m, n)$が1°2°3°の性質をもっているとき，このfをマッカーマン関数という。$f(o, n)$, $f(I, n)$, $f(2, n)$, …の順に求めていけばよい。

例えば，$f(1, n)$は，(2)から出る。$f(2, n)$は$f(2, n) = f(1, f(2, n-1)$

$=f(2,\ n-1)+2$
$=f(1,\ f(2,\ n-2))+2$
$=f(2,\ n-2)+2\times2$
$=\cdots$
$=f(2,0)+2n$
$=f(1,1)+2n$
$=2n+3$

$f(3,n)\ =f(2,\ f(3,\ n-1))$
$=2f(3,\ n-1)+3$
$=2f(2,\ f(3,\ n-2))+3$
$=2\ \{2f(3,\ n-2)+3\}\ +3$
$=2^2f(3,\ n-2)+2\times3+3$
$=2^2f(2,f(3,n-3))+2\times3+3$
$=2^2\ \{2f(3,n-3)+3\}\ +3\times2+3$
$=2^3f(3,n-3)+3\times2^2+3\times2+3$
$=\cdots$
$=2^nf(3.0)+3(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1)$
$=2^nf(2.1)+3(2^n-1)$
$=5\cdot2^n+3\cdot2^n-3$
$=2^{n+3}-3$ など

解答例

(1) $f(1,0)\ =f(0,1)$ (2°)
$=2$ (1°)

(2) $f(1,3)\ =f(0,f(1,2))$ (3°)
$=f(1,2)+1$ (1°)
$=f(0,f(1,1))+1$ (3°)
$=f(1,1)+2$ (1°)
$=f(0,f(1,0))+2$ (3°)
$=f(1,0)+3$ (1°)
$=2+3$ (1)
$=5$

$f(1,\ n)\ =f(0,f(1,n-1))$ (3°)
$=f(1,n-1)+1$ (1°)
$=f(0,f(1,n-2))+1$ (3°)
$=f(1,n-2)+2$ (1°)
$=\cdots$
$=f(1,n-k)+k$
$=\cdots$
$=f(1,0)+n$
$=n+2$ (1)

(3) $f(2,3)\ =f(1,f(2,2))$ (3°)
$=f(2,2)+2$ (2)
$=f(1,f(2,1))+2$ (3°)
$=f(2,1)+4$ (2)
$=f(1,f(2,0))+4$ (3°)
$=f(2,0)+6$ (2)
$=f(1,1)+6$ 2°
$=3+6$ (2)
$=9$

4

互いに異なる3個の0でない数の集合Aがあって，Aの要素のどの2個（重複をゆるす）の積もまたAの要素であるという。
(1) $A=\{a,b,c\}$ とするとき，$\{a^2,ab,ac\}=A$を示せ。
(2) $A\ni1$であることを示せ。
$1\in A$より，$A=\{1,\alpha,\beta\}$ と表せる。このとき$\alpha\beta$の値を調べて
(3) 集合Aを決定せよ。

講　評

正答率は非常に低くかった。扱いづらい問題であったようで全然手つかずの答案もおおかったのは残念であった。

(1)では$a^2\in A$，$ab\in A$，$ac\in A$からすぐに$\{a^2,\ ab,\ ac\}=A$としている者が目立ったが，この3つの要素が互いに相異なることを示さなければこの2つの集合の相等はいえない。2つの集合ABの相等を示す場合$A\leqq B$かつ$B\leqq A$を示せばよいが，要素の個数が有限な集合（これを有限集合という）については，$A\leqq B$およびAとBの要素の個数は等しいことの2つを示してもよいのである。

また，必要以上に要素を列挙した答案が見受けられたが余計なことは書くべきでない。

(2)で示すべきことは，集合Aは常に1という要素（数の集合の積に関する単位元）をもたなければならないということであって，集合Aとして1を要素にもつ例を示しただけでは解答にはならない。たとえば(1)より $\{a,b,c\}=\{a^2,\ ab,\ ac\}$ であるが，ここから簡単に$a=a^2$，$b=ab$，$c=ac$より$A\ni a=1$としては間違いである。たとえば，$a\in\{a^2,\ ab,\ ac\}$ であるから可能なすべての場合，すなわち$a=a^2$，$a=ab$あるいは$a=ac$の各々の場合について確かめてはじめて$1\in A$か言える。また，割り算を使って$a\in A$，$a\neq0$より$1=\frac{a}{a}\in A$とした解答もあった。$1=\frac{a}{a}$はよいのであるが，$\frac{a}{a}\in A$の真偽については証明を要することである。

(3)では$A=\{1,\alpha,\beta\}$から出発してα，βの満たすべき関係（$\alpha\beta=1$従って$\alpha^2=\beta$）を見出し，正答に到る人がすくなかった。

次に大島道子さん松田恭幸君の答案を解答例として上げておくので参考にしてほしい。

解答例1

(1) a, b, cはすべて異なり

$a, \neq 0$より

a^2, ab, acもすべて異なる

ここでa, b, c はAの要素だからAの要素の2個の積，a^2, ab, ac も，Aの要素

Aの異なる要素は3個だから

$\therefore A = \{a^2, ab, ac\}$

(2)(1)より $\{a, b, c\} = \{a^2, ab, ac\}$ ―①

i) $a=a^2$のとき

$a \neq 0$より $a=1$で①は常に成り立つ

ii) $a=ab$のとき

$a \neq 0$より $b=1$

このとき①は

左辺$=\{a, 1, c\}$

右辺$=\{a^2, a, ac\}$ で

$a \neq 1$ $c \neq 1$ $a \neq c$ より

$\{ac=1$ $c=a^2$ で$a^3=1$

$a \neq 1$より $a=\omega$，$(\omega=\dfrac{-1 \pm \sqrt{3l}}{2})$

$\therefore C=\omega^2$

iii) $a=ac$のとき

同様に$c=1$ $a=\omega$，$b=w^2$ w

よって$a=1$又は,$b=1$又は,$c=1$でA∈1

(3) $A=\{1, \alpha\beta\}$ より

(2)と同様にして

$\begin{cases} \alpha\beta=1 \\ \beta=\alpha^2 \end{cases}$

これを解いて

$\begin{cases} 2=\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \\ \beta=\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$ (複号同順)

よってA$=\{1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\}$

解答例2

(1) a, b, cは互いに異なる0でない数であるから

a^2, ab, acも互いに異なる0でない数である…①

$A=\{a, b, c\}$ であり Aの要素のどの2個の積もまた Aの要素であるのだから

$a^2 \in A$，$ab \in A$，$ac \in A$である …②

よって $\{a^2, ab, ac\} \neq A$ であれば，

①，②よりA$=\{a^2, ab, ac, x\}$

〔$X=xy, x, y \in A$〕とおけることになる

これはAの要素が3個であることに反する

よって $\{a^2, ab, ac\}=A$

(2) $A=\{a, b, c\}$ であり，また

$A=\{a^2, ab, ac\}$ でもあるのだから，

$a=ab$ 又は, $b=ab$ 又は, $c=ab$ である

i) $a=ab$のとき，$a \neq 0$ $b=\dfrac{a}{a}=1$

ii) $b=ab$のとき$a \neq 0$ $a=\dfrac{b}{b}=1$

iii) $c=ab$のとき，$a=a^2$又は$a=ac$である

1) $a=a^2$のとき，$a=1$

2) $a=ac$のときaキロ $c=\dfrac{a}{a}=1$

よってa, b, cのどれか1つは1である。

すなわちA∋1

(3) $A=\{1, \alpha, \beta\}$ ($1, \alpha, \beta$ は互いに異なる0でない数) とおくと，$\alpha\beta \ni A$であるから

$\alpha\beta=1$又は,$\alpha\beta=\alpha$又は,$\alpha\beta=\beta$

$\alpha \neq 1, 0$，$\beta \neq 1, 0$より$\alpha\beta \neq \alpha$，$\alpha\beta \neq \beta$

よって$\alpha\beta=1$

ここで，(1)よりA$=\{\alpha^2, \alpha\beta, \alpha \cdot 1\}=\{2^2, 1, 2\}$ とおけ，

$A=\{1, \alpha, \beta\}$ と比較して$\beta=\alpha^2$

$\therefore \begin{cases} \alpha\beta=1 & \cdots Ⓐ \\ \beta=\alpha^2 & \cdots\cdots Ⓑ \end{cases}$

Ⓐ，Ⓑより

$\alpha^2=1$ $\alpha \neq 1$であるから

$\alpha=\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$\beta=\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

よってA$=\{1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\}$

第　2　部

1

P進法で，$a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots\cdots a_2 a_1 a_{0(p)} = a_n\times p^n + a_{n-1}\times p^{n-1} + a_{n-2}\times p^{n-2} + \cdots\cdots + a_2\times p^2 + a_1\times p + a_0$の意味です。例えば$abcd_{(p)}=a\times p^3+b\times p^2+c\times p+d$となります。

ただし，$0<a_n\leqq p-1$，$0\leqq a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots a_2, a_1, a_0\leqq p-1$とします。

電子計算機が活躍するようになってから，２進法が大きく注目されるようになりました。しかし，この２進法は少し大きな数になるとすぐに桁数が増えていくのが難点です。この為２進法を10進法に直す場合によく桁数の読み違いからくるミスが少くありません。そこで，２進法を１度８進法とか４進法に直す方法で，しかも便利な方法について考えてみましょう。

(注) 何進法の書き表し方であるかをはっきりさせるために，$abcd_{(p)}$のように$_{(p)}$を用いる。また１２３のように$_{(p)}$が付けられていない場合のみ10進法ということにする。

(1) $11011011_{(2)}$を４進法で表してみよ。
その結果がこの数に図のような区切りを入れて１つ１つの区切りが２進法で表す10進数を書き込む，のと一致することを確めよ。（例えば$11\,|\,01\,|\,10\,|\,11$，の$|\,10\,|$の部分は$1\times2=2$等とおいてゆく。）
$11\,|\,01\,|\,10\,|\,11$

(2) $11011011_{(2)}$を８進法で表す場合(1)の考えを利用して３桁毎に区切りを入れ，１つ１つの区切りが２進法で表す10進数を書き並べるとよいことを(1)と同様に確かめよ。

(3) (2)で確かめたことを数式の上で証明せよ。
(注) 一般的に文字式で証明してもよいし$11011011_{(2)}$を使って証明してもよい。

(4) $abcdef_{(3)}$ $(a\neq0)$を９進法に直す場合も２桁毎の区切りを入れて，
$ab_{(3)}=p,\quad cd_{(3)}=q,\quad ef_{(3)}=\gamma$
とするとき，$abcdef_{(3)}=pq\gamma_{(9)}$となることを証明せよ。

講　評

最近入試問題等でもP進法に関する問題がよく出題されるようになり，参考書等でも解説されているせいでもあろうか，各答案とも基本的考え方はよく理解されていると思われる。ある数を２進法，４進法，８進法で表した場合の２進法と４進法の桁数の関係とか，２進法と８進法の桁数の関係など興味をそそられる問題であろうと思われる。今回は２進法を４進法や８進法に読み直す場合の方法と，その方法が何故可能なのかを数理的に考えてみることに目標を置いた。松田恭幸君他30数名の人が高得点を取ったことは非常によろこばしいことです。ここで１つだけ特に注意していただきたいことは，P進法で，$a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots\cdots a_2\ a_1\ a_{0(p)}$と表わされた場合$0<a_n\leqq p-1$，$0\leqq a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots a_2, a_1, a_0\leqq p-1$ということである。そこで(4)の場合に$abcdef_{(3)}=pq\gamma_{(9)}$を示す場合に$0<p\leqq8$，$0\leqq q\leqq8$，$0\leqq\gamma\leqq8$，を必ず示しておかなければならないということである。この点を注意してほしい。

解答例

(1) $11011011_{(2)}=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1=219$

この219を４進法で表す。

$$\begin{array}{r|l l}
4 & 219 & \cdots\cdots 3\\
4 & 54 & \cdots\cdots 2\\
4 & 13 & \cdots\cdots 2\\
 & 3 & \cdots\cdots 1
\end{array}$$

$3123_{(4)}=3\times4^3+1\times4^2+2\times4+3$
$=219$

$\therefore\ 11011011_{(2)}=3123_{(4)}$

ところで図のように区切りを入れてみる。

$11\,|\,01\,|\,10\,|\,11_{(2)}=3123_{(4)}$
$3\quad 1\quad 2\quad 3$

(2) (1)と同様にして

$$\begin{array}{r|l l}
8 & 219 & \\
8 & 27 & \cdots\cdots 3\\
 & 3 &
\end{array}$$

$219=333_{(8)}$

区切りを入れるのは３桁毎にして

$11\,|\,011\,|\,011_{(2)}=333_{(8)}$と
$3\quad 3\quad 3$

なる。

(3) $11011011_{(2)}$
$=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1$
$=(2+1)2^6+(2+1)2^3+3$
$=3\times8^2+3\times8^1+3=333_{(8)}$

(4) $abcdef_{(3)}$
$=a\times3^5+b\times3^4+c\times3^3+d\times3^2+e\times3+f$
$=(3a+b)\times3^4+(3c+d)\times3^2+3e+f$
$=(3a+b)9^2+(3c+d)9+3e+f$
ところで３進法という意味より
$0<a\leqq2,\ 0\leqq b,c,d,e,f\leqq2$

従って　$0<3a+b\leqq 8$

$0\leqq 3c+d\leqq 8$, $0\leqq 3e+f\leqq 8$

より $0<p\leqq 8$, $0\leqq q\leqq 8$

$0\leqq \gamma\leqq 8$ となるから

$abcdef_{(3)}=p\times 9^2+q\times 9+\gamma$

$=pq\gamma_{(9)}$ となる。

解答例 (2)

(1) $11011011_{(2)}=1\times 2^7+1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$

$=128+64+0+16+8+0+2+1$

$=219$

$=3123_{(4)}$

$|11|01|10|11_{(2)}$

$3\quad 1\quad 2\quad 3_{(4)}$

```
4) 219
4)  54 …… 3
4)  13 …… 2
4)   3 …… 1
     0
```

これは，$11011011_{(2)}$ を２桁毎に区切って１つ１つの区切りが２進法で表わす10進数を書きこんだものと一致する。

(2) $11011011_{(2)}=219$

$=333_{(8)}$

$11|011|011$

$3\quad 3\quad 3_{(8)}$

```
8) 219
8)  27 …… 3
8)   3 …… 3
     0 …… 3
```

確かに３桁毎に区切りを入れ，１つ１つの区切りが，２進法で表わす10進法を書いたものと一致している。

(3) $11011011_{(2)}=1\times 2^7+1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^3+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$

$=(0+1\times 2+1)\times 2^6+(0+1\times 2+1)\times 2^3+(0+1\times 2+1)\times 2^0$

$=3\times 8^2+3\times 8^1+3\times 8^0$

$=333_{(8)}$

(4) $abcdef_{(3)}=a\times 3^5+b\times 3^4+c+3^3+d\times 3^2+e$

$=(a\times 3^1+b)\times 3^4+(c\times 3^1+d)3^4+(e\times 3^1+f)\times 3^0$

$=p\times 9^2+q\times 9^1+\gamma\times 9^0$

$=pq\gamma_{(3)}$

(1), (2)について

例えば，$11011011_{(2)}$ を4進法で表すときには，２桁ずつ区切って，その１つ１つの区切りが表わす数を4進数で書く，としたほうが（10進数で書くのではなく）いいと思います。16進数に直すときなどに混乱するかもしれません。

2

ジョーカーをのぞいたトランプのカード52枚から５枚のカードをとったとき，次のように呼ぶことにする。(ただしＪ＝11, Ｑ＝12, Ｋ＝13, Ａ＝1)

(1)　５枚のカードのなかに，同じ数字のカードが３枚あるとき。
（スリーカード）

(2)　５枚のカードのなかに，同じ数字のカードが４枚あるとき。
（フォーカード）

(3)　５枚のカードの数字がすべてつづいているとき。
例えば，８，９，10，11，12（ストレート）

今52枚のカードをよくまぜてつみあげ，上から５枚とったところ。「◇５，♡５，◇７，♧８，♡９」であった。

(A)　「◇５，◇７，♧８，♡９」を残し，「♡５」をのぞき，つみ上げてあるカードから１枚とり５枚とするとき（ストレート）となる確率を求めよ。

(B)　「◇５，♡５」を残して他のカードを取りのぞき，つみ上げてあるカードから３枚とり，５枚とするとき，

イ)　（フォーカード）となる確率を求めよ。

ロ)　（スリーカード）となる確率を求めよ。

ハ)　（スリーカード）または(フォーカード）となる確率を求めよ。

答えは分数でもよい。

講　評

大変できが悪い。確率は中学校で習っただけだから難しかったのかもしれない。でも大事な考え方だから，しっかり勉強してほしい。

(A)　５，７，８，９のカードに１枚のカードを加えてストレートにするのに，６でなく４か10を選ぶとよいと考えた人が多かったがケアレスミスによるものである。１つ１つ確認してから解答するように心掛けるようにしてほしい。

(B)　イ)フォーカードだから３枚引くうち２枚が５で

あればよい。このとき5のカードを2枚引くから1枚目2枚目に5を引くのだから$\frac{2}{47}\times\frac{1}{46}=\frac{1}{1081}$とした答案が比較的多かった。多分3枚目は残り45枚のどのカードを引いてもよいから$\frac{45}{45}=1$だから$\frac{2}{47}\times\frac{1}{46}$としたものと思われるが，3枚を引くのだから（1枚ずつ順に3枚引くと考える。）3枚のうち1枚だけが5以外のカードであるから，でる順序が当然問題になる。1枚目は，2枚目は，3枚目はと1枚ずつ引く場合について考えるようにしてほしい。3枚をまとめて引く考え方をしていると思われる人にミスが目立った。分析と統合という言葉があるが，十分分析して起こりうる場合をすべて求めてから計算するように心掛けてほしい。

ロ)スリーカードとなる確率を求めた人は殆んどいなかった。着眼点にも書いてあるように，手もとにある5のカード，7，8，9のカードとその他のカードがスリーカードとなる場合の確率が違うことに気付かない答案が多かった。これも分析の不足によるものと思う。是非問題をとくとき，落ちの無いよう分析してほしい。

ハ)ロ)ができていないのでハ)ができた人は殆んどいなかった。もう一度「解答と解説」を見てほしい。

確率は分析力を養うに格好の教材だから，しっかり勉強してほしい。

3

△ABCの3つの頂点A，B，Cより対辺に下した垂線をAD，BE，CFとし，垂心をHとする。

線分AH，BH，CHの中点をP，Q，R，辺BC，CA，ABの中点をL，M，Nとするとき，次の問に答えよ。

(1) 四辺形PQLMと四辺形NLRPは平行四辺形であることを証明せよ。

(2) 四辺形PQLMと四辺形NLRPは長方形であることを証明せよ。

(3) 9点D，E，F，L，M，N，P，Q，Rは同一円周上にあることを証明せよ。

(注) この円を△ABCの“9点円”又は，“オイラー円”という。

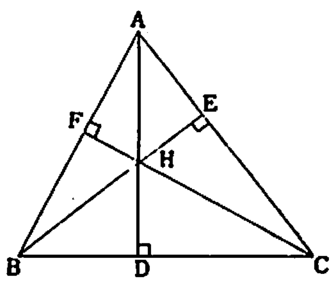


図　形

第3部(3)の講評

全体に幾何学の答案の書き方が，あまり上手でない様に思われます。

(1) 条件をかかないで，いきなり二辺中三連結定理からAB$\perp\!\!\perp$2PQなどと，かいてあるのはいけませんね。ここは△ABHでP，QはAH，BHの中点故AB$\perp\!\!\perp$2PQとかくべきでしょう。

以下同様です。平行四辺形の定義は，相対す2組の2辺が平行な四辺形です。定義や名称をきちんと覚えましょう。

(2) 長方形の証明は平行四辺形の1内角が直角であれば，十分である。概して出来はよかった様に思う。

(3) 長方形は頂点が対角線を直径とする円周上にある。又3垂線の足は，D，E，FがそれぞれPL，Q，M，RNを直径とする円周上にある。問題はPL，QM，RNを直径とする3つの円は同じだということを，確認した人は8人しかいなかった。この中で若月大輔君の答案が簡潔で，要点をすべて，満たしていた。

若月大輔君の答案をのせておくので参考にしてほしい。

3

(1) P，QはAH，BHの中点なのでAB∥PQ，
M，LはAC，BCの中点なのでAB∥LMよってPQ∥LM　――①
P，MはAH，ACの中点なのでHC∥PM
L，QはBH，BCの中点なのでHC∥LQ
よってPM∥LQ　――②
①，②より
四辺PQLMは2組の平行な直線でできているよって四辺形PQLMは平行四辺形である。
N，LはAB，BCの中点なのでAC∥NL
P，RはAH，HCの中点なのでAC∥PR
よってNL∥PR　――③
N，PはAB，AHの中点なのでBH∥NP
L，RはBC，HCの中点なのでBH∥LR
よってNP∥LR　――④
③，④より
四辺形NLRPは2組の平行な直線でできている。よって四辺形NLRPは平行四辺形である。
△BCFは直角三角形なので
∠FBC＋∠FCB＝90°
また，AB∥MLより∠FBC＝∠MLC（同位角）
CH∥LQより∠FCB＝∠QLB（同位角）
よって∠MLC＋∠QLB＝90°
よって∠MLQ＝90°

平行四辺形ＰＱＬＭの１つの角が90°なので他も90°四辺形ＰＱＬＭは長方形

△ＡＢＥは直角三角形なので

∠ＡＢＥ＋∠ＢＡＥ＝90°

また，ＮＰ//ＢＨなので∠ＡＢＥ＝∠ＡＮＰ

ＡＣ//ＮＬなので∠ＢＡＥ＝∠ＢＮＬ

よって∠ＡＮＰ＋∠ＢＮＬ＝90°

よって∠ＰＮＬ＝90°

平行四辺形ＮＬＲＰの１つの角が90°なので他の角も90°よって四辺形ＮＬＲＰは長方形

(3) ＰＬを円の直径とすると，

(2)より２つの四辺形の角は90°

よって点Ｎ，Ｑ，Ｒ，ＭはＰＬを直径とする円周上にある。

また，∠ＰＤＬ＝90°なので点ＤもＰＬを直径とする円周上にある。

四辺形ＰＱＬＭは長方形なので

ＱＭを円の直径としても上は成り立つ

∠ＱＥＭ＝90°なので，点ＥはＱＭを直径とする円周上にある。

すなわち，ＰＬを直径とする円周上にある。

四辺形ＮＬＲＰは長方形なので

ＮＲを円の直径としても上は成り立つ

∠ＮＦＲ＝90°なので，点ＦはＮＲを直径とする円周上にある。

すなわちＰＬを直径とする円周上にある。

よって，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｌ，Ｍ，Ｎ，Ｐ，Ｑ，Ｒは同一円周上にある。

4

定義域が集合Ａである関数 f に対して，$f(a)=a$ となる $a\in A$ を，f の不動点という。今，〔0,1〕で $\{t \mid 0\leqq t\leqq 1\}$ なる集合を表わすことにするとき，次の問いに答えよ。

(1) 〔0,1〕を定義域とし，値域が〔0,1〕に含まれる関数で，$x=\frac{1}{3}$ を唯一つの不動点としてもつ関数の例を２つあげよ。

(2) 定義域が〔0,1〕関数の $f(x)=ax^2+bx+c$ について，値域が〔0,1〕，かつ〔0,1〕内に唯一つの不動点をもつための，a，b，c の条件を求め，このときの不動点を b を用いて表わせ。

（ただし，$a>0$）

講　評

(1) 不動点とは $y=x$ との交点であることに気がついたものは，だいたいできていた。ただし値域が〔0,1〕からはみ出しているものもが多少目についた。また，例をあげる時は，できるだけ単純なものをあげるのが望ましい。したがって $y=\frac{1}{3}$ などは，最もよい例である。

(2) 値域が〔0,1〕であることに注意する。(1)のように値域が〔0,1〕に真に含まれる状況を考えては不十分。問題は，いわゆる〔0,1〕から〔0,1〕の上への関数についてである。あとは，不動点が，ただ一つということ，すなわち，$y=x$ のグラフと交点が一つであるような状況を考えればよい。そうすると，「解答と解説」で示したような二つの場合が考えられる。ここで一つ注意しておきたいことは，不動点が一つということは，$x=ax^2+bx+c$ の解が重解をもつ，ということとはかぎらないということである。この方程式の解が，〔0,1〕の中でただ一つ解をもっていればよい。満点は一人もいなかったが，次に，寺尾貴道君の解答例を示して講評を終る。

解答例

(1) （寺尾貴道君）

例１　$f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

まず，$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$，

よって，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ が成り立つ。

$f(x)=x$ とおくと，$x=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$

$\therefore\ \frac{3}{4}x=\frac{4}{9}$

よって $x=\frac{1}{3}$ だから $x=\frac{1}{3}$ はただ１つの不動点である。$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\frac{1}{9}\leqq f(x)\leqq\frac{4}{9}$ だから値域は〔0,1〕に含まれる。

例２　$f(x)=\frac{3}{4}(x-1)^2$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$f(x)=x$ とおくと，$x=\frac{3}{4}(x-1)^2$

$\therefore\ 4x=3x^2-6x+3$

$\therefore\ 3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{3},\ 3$

$0\leqq x\leqq 1$ より $x=3$ は不適。よって $x=\frac{1}{3}$ がただ一つの不動点。

また，$0\leqq x\leqq 1$ のとき最大値，最小値を求めると明らかに最大値は $\frac{3}{4}$，最小値は $\frac{3}{4}$。よって値域は〔0,1〕に含まれる。しかも，$f(x)$ は〔0,1〕において単調減少である。

担当委員

坂下正雄	湊川三竿
林　重一	北隅嘉長
長尾　章	河野章二
大山　斉	永淵敬二
関口　隆	堀　　喬
古川政春	関川　晃
中野康二	佐々木光憲
阿部知二	小野信幸
中田保之	井原　肇