問題５

Nを２以上の自然数，pを素数とし，$[x]$は実数xを超えない最大の整数を表すものとする。

(1)　実数a，bについて

$$[a+b]\geqq[a]+[b]$$

が成り立つことを説明しなさい。

(2)　自然数nを素因数分解したときのpの指数を$\mathrm{ord}_p n$と表すこととする。たとえば，$495=3^2\cdot5\cdot11$であるから，$\mathrm{ord}_3 495=2$である。このとき，

$$\mathrm{ord}_p N!=\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\cdots$$

と表されることを説明しなさい。

(3)　rを0以上N以下の整数とする。(1)，(2)の性質を利用して

$${}_N\mathrm{C}_r=\frac{N!}{r!(N-r)!}$$

は整数であることを示しなさい。

(4)
$$\mathrm{ord}_p\,{}_{2pN}\mathrm{C}_{pN}=\mathrm{ord}_p\,{}_{2N}\mathrm{C}_N$$

を示しなさい。

(5)
$$\mathrm{ord}_2\,{}_{2N}\mathrm{C}_N\geqq1$$

を示しなさい。また，

$$\mathrm{ord}_2\,{}_{2N}\mathrm{C}_N=1$$

であるとき，Nは２のべき乗である，すなわち，自然数nを用いて

$$N=2^n$$

と表されることを示しなさい。

(6)　Nが２のべき乗であるとき，$\dfrac{N!}{2^{\mathrm{ord}_2 N!}}$を８で割った余りを求めることで，${}_{2N}\mathrm{C}_N$を８で割った余りを求めなさい。