問題４

n を自然数とし，１から 2^n までの異なる番号が割り当てられた人がいる。この 2^n 人が１対１で対戦をし，番号が小さい方を「勝ち」，番号が大きい方を「負け」として，第１位から第 2^n 位までの順位を次のようなルールで決定する。

【ルール】

Ⅰ　最初は 2^n 人が第１位から 第 2^n 位を決めるグループで試合を行う。

Ⅱ　$y-x+1$ 人が第 x 位から第 y 位を決めるグループで試合を行うとき，

ⅰ）$y-x>1$ の場合

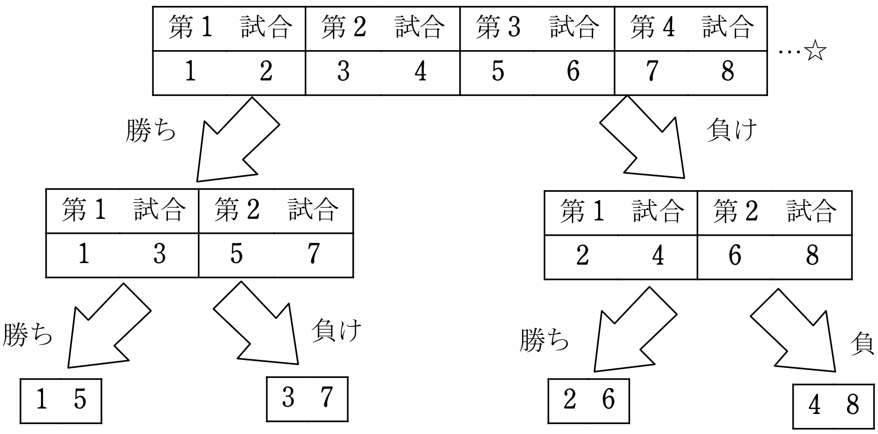
勝った人は 第 x 位から第 $\dfrac{x+y-1}{2}$ 位を決めるグループに進み，負けた人は第 $\dfrac{x+y+1}{2}$ 位から第 y 位を決めるグループに進む。

ⅱ）$y-x=1$ の場合

勝った人は第 x 位，負けた人は第 y 位とする。

Ⅲ　順位が決まるまでⅡを繰り返す。ただし，第 i 試合で行う対戦は前のグループでの第 $2i-1$ 試合と第 $2i$ 試合で勝った人同士，負けた人同士がそれぞれ行う。

例えば，$n=3$ で第１位から第８位を決めるグループが下の☆の組み合わせで行われた場合の勝敗が次の通りとする。



よって，最終的な順位は

第１位	第２位	第３位	第４位	第５位	第６位	第７位	第８位
1	5	3	7	2	6	4	8

となり，全試合数は 12 試合である。

(1)　$n=3$ のとき，最終的な順位が次のようになるときの第１位から第８位を決めるグループでの試合の組み合わせの例を一つ答えなさい。

第１位	第２位	第３位	第４位	第５位	第６位	第７位	第８位
1	2	3	4	5	6	7	8

(2)　全試合数を n を用いて表しなさい。

次に，(1)のように最終的な順位と番号が一致する場合の数を求めよう。ただし，同一試合において順番が異なる場合は別のものと考える。（つまり，$\boxed{1\quad 2}$ と $\boxed{2\quad 1}$ は別のものと考える。）

x，y をルールによって決まる組み合わせのみで考えるとき，第 x 位から第 y 位を決めるグループにおける最終的な順位と番号が一致する場合の数を $N(x,\ y)$ とする。

(3)　$N\left(x,\ \dfrac{x+y-1}{2}\right)=N\left(\dfrac{x+y+1}{2},\ y\right)$ である理由を説明しなさい。

(4)　$N(1,\ 2^n)$ を n を用いて表しなさい。