問題２

中心Ｏ，半径 r の円Ｏの内部に点Ｐがあり，直線 l と直線 m が点Ｐで垂直に交わっている。

円Ｏと直線 l との２つの交点をＡ及びＢ，円Ｏと直線 m との２つの交点をＣ及びＤとするとき，$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ の値は一定であることを証明しなさい。

着眼点

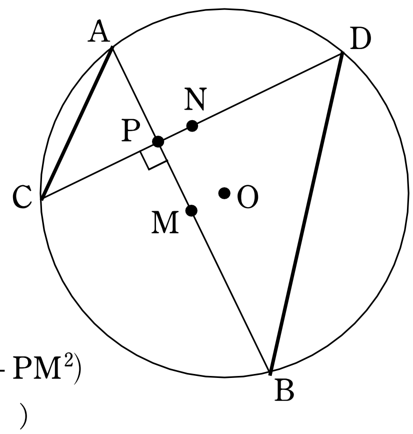
数学とは，本来，自由な学問です。

数学の問題（大学入試や模擬試験を含む）では，しばしば「○○を用いて求めよ」とか「□□を用いて証明せよ」という問題を見かけます。難しくて手も足も出ないような問題ではそういった“誘導”が必要で，あればありがたいと思いますが，この“誘導”は解答者に親切なようでいて，実は，自由な発想を妨げる“余計なおせっかい”ではないだろうかと思うのです。解く（証明する）ために，何を用いればよいのかを考えることこそが数学だと思いませんか。

本問は色々なアプローチが可能です。これまで40年近く続いている北海道高等学校数学コンテストでは，過去に，(1)で求めたことを用いたりヒントにしたりして(2)を解いたり，(1)(2)で求めたことをヒントにして(3)を証明したり，といった問題形態が多くとられていますが，本問はあえて“誘導”をせずに，出題しました。

数学Ⅱや数学Ｂを履修していない生徒にはわかりにくいでしょうが，解答例を数パターン示します。しかし，これらの方法以外でも証明できる問題です。むしろここに提示した証明よりももっと鮮やかな証明もあるでしょう。コンテスト参加生徒の皆さんがどのように証明するかを楽しみにしています。

証明



三平方の定理により，

$$AC^2+BD^2=AP^2+CP^2+BP^2+DP^2$$

ABの中点をMとすると， $AM=BM$ であり，

ア） $AP=AM-PM$， $BP=BM+PM=AM+PM$

イ） $AP=AM+PM$， $BP=BM-PM=AM-PM$

のいずれかが成り立つ。

ア，イのいずれの場合も，

$$AP^2+BP^2=(AM-PM)^2+(AM+PM)^2=2(AM^2+PM^2)$$

が成り立つ。（PがMと一致する場合は $PM=0$ とする。）

同様に，CDの中点をNとすると，

$$CP^2+DP^2=(CN-PN)^2+(DN+PN)^2=2(CN^2+PN^2)$$

が成り立つ。（PがNと一致する場合は $PN=0$ とする。）

ここで， $OM\perp AB$， $ON\perp CD$ であることから，三平方の定理により

$$AM^2=OA^2-OM^2=r^2-OM^2,\quad CN^2=OC^2-ON^2=r^2-ON^2$$

である（MがOと一致する場合は $OM=0$ とする。Nも同様。）から，

$$\begin{aligned}AC^2+BD^2&=AP^2+CP^2+BP^2+DP^2\\&=(AP^2+BP^2)+(CP^2+DP^2)\\&=2(AM^2+PM^2)+2(CN^2+PN^2)\\&=2\{(AM^2+PN^2)+(CN^2+PM^2)\}\end{aligned}$$

$\angle OMP=\angle ONP=\angle MPN=90^\circ$ より四角形OMPNが長方形になることから

$\mathrm{PM}=\mathrm{ON}$， $\mathrm{PN}=\mathrm{OM}$

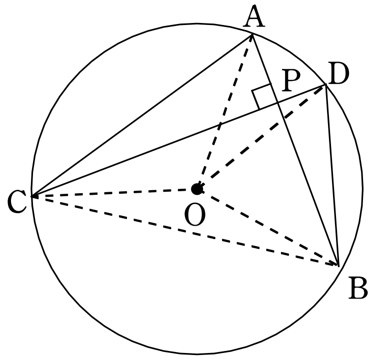
が得られるので

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=2\{(\mathrm{AM}^2+\mathrm{OM}^2)+(\mathrm{CN}^2+\mathrm{ON}^2)\}$$
$$=2(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2)=2(r^2+r^2)=4r^2$$

ゆえに， $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ の値は一定である。

証明（三角比を用いる）

$\triangle\mathrm{ABC}=\theta$ とおくと， $\angle\mathrm{APC}=2\angle\mathrm{ABC}=2\theta$



$\triangle\mathrm{BCP}$ に着目すると

$$\angle\mathrm{BCP}=180^\circ-(\angle\mathrm{BPC}+\angle\mathrm{PBC})$$
$$=180^\circ-(90^\circ+\theta)=90^\circ-\theta$$

よって，

$$\angle\mathrm{BOD}=2\angle\mathrm{BCP}=2(90^\circ-\theta)=180^\circ-2\theta$$

$\triangle\mathrm{ACO}$ に余弦定理を用いて

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{AOC}$$
$$=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos 2\theta=2r^2-2r^2\cos 2\theta$$

$\triangle\mathrm{BDO}$ に余弦定理を用いて

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OD}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}\cos\angle\mathrm{BOD}$$
$$=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos(180^\circ-2\theta)=2r^2-2r^2\cdot(-\cos 2\theta)=2r^2+2r^2\cos 2\theta$$

したがって，

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=(2r^2-2r^2\cos 2\theta)+(2r^2+2r^2\cos 2\theta)=4r^2$$

ゆえに， $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ の値は一定である。

証明（ベクトルを用いる）

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=r$ であるから

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=4r^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$
$$=4r^2-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\angle\mathrm{BOD})$$
$$=4r^2-2(r^2\cos\angle\mathrm{AOC}+r^2\cos\angle\mathrm{BOD})$$
$$=4r^2-2r^2(\cos\angle\mathrm{AOC}+\cos\angle\mathrm{BOD})\quad\cdots①$$

ここで，中心角と円周角の性質により

$$\angle\mathrm{AOC}=2\angle\mathrm{ABC},\quad \angle\mathrm{BOD}=2\angle\mathrm{BCD}$$

であり，$\triangle\mathrm{BPC}$ に着目すると

$$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-(\angle\mathrm{BPC}+\angle\mathrm{BCD})=180^\circ-(90^\circ+\angle\mathrm{BCD})=90^\circ-\angle\mathrm{BCD}$$

となるので，

$$\cos\angle AOC = \cos 2\angle ABC = \cos 2(90^\circ - \angle BCD) = \cos(180^\circ - 2\angle BCD)$$
$$= -\cos 2\angle BCD = -\cos\angle BOD$$

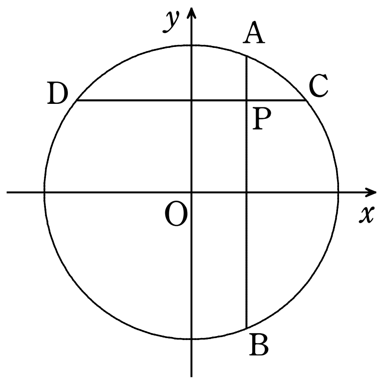
であるから，①より

$$AC^2 + BD^2 = 4r^2$$

ゆえに，$AC^2 + BD^2$ の値は一定である。

証明（座標を用いる）

原点を中心とし，AB を x 軸と直交するように，CD を y 軸と直交するようにしても，一般性は失われない。



A，B は x 軸に関して対称なので

$A(a,\ b)$，$B(a,\ -b)$

C，D は y 軸に関して対称なので

$C(c,\ d)$，$D(-c,\ d)$

と表すことができ，A，B，C，D は原点が中心，半径 r の円周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = r^2,\quad c^2 + d^2 = r^2$$

が成り立つ。

このとき，

$$AC^2 + BD^2 = \{(c-a)^2 + (d-b)^2\} + [(-c-a)^2 + \{d-(-b)\}^2]$$
$$= c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 + c^2 + 2ac + a^2 + d^2 + 2bd + b^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$$
$$= 2(a^2 + b^2) + 2(c^d + d^2) = 2r^2 + 2r^2 = 4r^2$$

ゆえに，$AC^2 + BD^2$ の値は一定である。