問題 1

自然数 n に対して関数 $f(n)$ および $F(n)$ を次のように決める。

① $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ をそれぞれ 9 以下の負でない整数とする。これらが与えられたとき，次の規則で $f(5)$, $f(6)$, …を定める。

$f(5)=(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ を 10 進法で表したときの一の位の数$)$

$f(6)=(f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ を 10 進法で表したときの一の位の数$)$

…

$f(n+4)=(f(n)+f(n+1)+f(n+2)+f(n+3)$ を 10 進法で表したときの一の位の数$)$ $(n\geqq 1)$

②さらにこのとき，$F(n)$ を次のように定義する。

$$F(n)=1000\cdot f(n)+100\cdot f(n+1)+10\cdot f(n+2)+f(n+3)$$

たとえば，$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$ のとき，

$f(5)=(1+2+3+4=10$ の一の位の数$)=0$,

$f(6)=(2+3+4+0=9$ の一の位の数$)=9$,

$f(7)=(3+4+0+9=16$ の一の位の数$)=6$,

$f(8)=(4+0+9+6=19$ の一の位の数$)=9$

$F(1)=1234$, $F(2)=2340$, $F(3)=3409$, $F(4)=4096$, $F(5)=969$

である。

(1) $f(1)=0$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=8$ のとき，$f(5)$, $f(6)$, …, $f(10)$ の値を求めなさい。答えのみを解答用紙の所定の場所に記入すること。

(2) $F(1)=2021$ のとき，$F(2)$, $F(3)$, …, $F(10)$ の値を求めなさい。答えのみを解答用紙の所定の場所に記入すること。

(3) $f(5)=0$, $f(6)=3$, $f(7)=5$, $f(8)=8$ となるように，$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ の値を定めなさい。

次に，この定義で，たとえば，$f(1)=5$，$f(2)=0$，$f(3)=0$，$f(4)=5$ のとき，$F(1)=5005$，$F(2)=50$，$F(3)=505$，$F(4)=5050$，$F(5)=500$，$F(6)=5005$，$F(7)=50$，…となり，$5005\to 50\to 505\to 5050\to 500\to 5005\to\cdots$ と繰り返す。すなわち，すべての自然数 n に対して $F(n)=F(n+5)$ が成り立つ。このような性質を周期的といい，このとき 5 を周期という。

(4) 周期が 1，すなわち，すべての自然数 n に対して $F(n)=F(n+1)$ が成り立つのは $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ のときに限ることを証明しなさい。

(5) $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ がどのような 9 以下の負でない整数としても，$F(n)$ は周期的である，すなわち，すべての自然数 n に対して $F(n)=F(n+k)$ となる自然数 k があることを証明しなさい。（ k は自然数 n によらないことに注意）

(6) $F(1)=2021$ のとき，$F(n)=4837$ となる自然数 n が存在することを証明しなさい。ただし，n の値までは問わない。