着眼点

さいころの確率の問題です。投げる回数が１回や２回であればそんなに難しくありませんが，回数が増えると大変です。ここは素数の性質を使いましょう。(3)がヒントになっていますが，なぜ６で割ったときの余りで分類するとよいのでしょうか。

解答例の１から30までの整数の表を見てください。一番上の段を除くと，素数は６で割った余りが１のところと５のところにしかありません。

６で割った余りが２の数は，k を０以上の整数として $6k+2$ と表せますが，$k=0$ のとき以外は２でない偶数なので素数にはなりません。余り４の場合と余り０の場合も k を０以上の整数として $6k+4$，$6k$ と表せますが，いずれも２でない偶数なので，素数にはなりません。余りが３の場合は k を０以上の整数として $6k+3$ と表せますが，$k=0$ のとき以外は３の倍数なので素数ではありません。２と３以外の素数は６で割った余りが１または５の場合に属しています。ただし，６で割った余りが１または５の場合がすべて素数になるわけではなく，６で割った余りが１の場合でも25のように素数でない場合もあります（６で割った余りが５でも35は素数でない）。

(4)の場合，さいころを３回投げたときの目の和は３から18までの整数ですが，素数になるのは３，５，７，11，13，17の６通りあります。６で割った余りで分類すると，7と13は６で割った余りが１の場合であり，３は６で割った余りが３の場合，５，11，17は６で割った余りが５の場合です（３から18までの整数で，６で割った余りが１と５の整数はすべて素数である）。目の和が素数になるのは和が３の場合と６で割った余りが１，５の場合を加えれば終わりです。

６で割った余りで分類する理由のもう一つはさいころの目が６個あるからです。さいころを１回投げたときに出る目は１から６なので，６で割った余りを１，２，３，４，５，０と考えると，どの場合も同様に確からしい。２回目以降も，例えば１回目が１の場合，２回目が１であれば目の和を６で割った余りが２，２回目が２であれば目の和を６で割った余りが３，…，２回目が６であれば６で割った余りが１となって，どの場合も余りの確率は同様に確からしくなります。（数学Ｂで扱う「数学的帰納法」を用いれば示されるのですが，今回は２回目までの和について確率が等しければ３回目も等しいことを調べます）

(5)では，さいころを５回投げたときの目の和が素数である場合を調べますが，和は５から30までで，このうち６で割った余りが１となる７，13，19は素数ですが，25は素数でありません。また，６で割った余りが５となる５，11，17，23，29はすべて素数。素数になる場合の確率をすべて加えるより，余りが１の場合と余りが５の場合を加えたものから和が25の場合を除いた方が早くできます。

$\boxed{解答例}$

(1)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

(2)　さいころを2回投げるとき，目の出方は，6×6 の36通りあり，これらを表で表すと右のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

　これにより解答用紙の表を完成させると，次のようになる。

目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

　よって，2つの目の和が素数になる確率は

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

(3)　さいころを2回投げるとき，目の和を6で割った余りが n （$n=1，2，3，4，5，0$）である確率を P_n で表すと

$n=1$ となるのは目の和が7のときだから，$P_1=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，

$n=2$ となるのは目の和が2，8のときだから，$P_2=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}=\frac{1}{6}$，

$n=3$ となるのは目の和が3，9のときだから，$P_3=\frac{2}{36}+\frac{4}{36}=\frac{1}{6}$，

$n=4，5，0$ の場合も同様に求めると，次の表のようになる。

目の和を6で割ったときの余り	1	2	3	4	5	0
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

　さいころを3回投げるとき，目の和を6で割った余りが1となるのは，

$n=1，2，3，4，5，0$ のとき，3回目にそれぞれ6，5，4，3，2，1の目が出るときだから，その確率は

$$P_1\times\frac{1}{6}+P_2\times\frac{1}{6}+P_3\times\frac{1}{6}+P_4\times\frac{1}{6}+P_5\times\frac{1}{6}+P_0\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

　さいころを3回投げるとき，目の和を6で割った余りが2となるのは，

$n=1，2，3，4，5，0$ のとき，3回目にそれぞれ1，6，5，4，3，2の目が出るときだから，その確率は

$$P_1\times\frac{1}{6}+P_2\times\frac{1}{6}+P_3\times\frac{1}{6}+P_4\times\frac{1}{6}+P_5\times\frac{1}{6}+P_0\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

さいころを 3 回投げるとき，目の和を 6 で割った余りが 3，4，5，0 についても同様に考えると，その確率はいずれも

$$P_1\times\frac{1}{6}+P_2\times\frac{1}{6}+P_3\times\frac{1}{6}+P_4\times\frac{1}{6}+P_5\times\frac{1}{6}+P_0\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

ゆえに，さいころを 3 回投げたときの目の和を 6 で割った余りが 1，2，3，4，5，0 である確率はすべて等しい。

⑷　さいころを 3 回投げるとき，出た目の和は 3 から 18 までの 16 通りあるが，それらを 6 で割った余りで分類すると表のようになる。

6 で割った余り	1	2	3	4	5	0
			3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18

目の和を 6 で割った余りがが 2，4，0 になるとき，目の和は 4 以上の偶数なので，素数ではない。

さいころを 3 回投げるとき，出た目の和が素数になるのは，

ⅰ）和を 6 で割った余りが 1 の場合～ 7，13

ⅱ）和を 6 で割った余りが 5 の場合～ 5，11，17

ⅲ）和を 6 で割った余りが 3 の場合～ 3 に限られる。（ 9，15 は該当しない。）

⑶の結果から，さいころを 3 回投げるとき，出た目の和を 6 で割った余りが 1， 5 である確率はともに $\frac{1}{6}$ である。

また，さいころを 3 回投げるとき，出た目の和を 6 で割った余りが 3 となるのは，和が 3 のときに限られる。これは 3 回とも 1 の目が出る場合だから，その確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

ゆえに，さいころを 3 回投げるとき，出た目の和が素数となる確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{216}=\frac{73}{216}$$

⑸　さいころを 5 回投げるとき，出た目の和は 5 から 30 のいずれかである。

6 で割った余り	1	2	3	4	5	0
					5	6
	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30

表から，さいころを 5 回投げるとき，出た目の和が素数となるのは，

ⅰ）和を 6 で割った余りが 5 の場合～ 5，11，17，23，29

ⅱ）和を 6 で割った余りが 1 の場合～ 7，13，19 （ 25 は該当しない）

のときである。

　さいころを5回投げるとき，出た目の和を6で割った余りが5である確率は，問題文より，$\dfrac{1}{6}$ である。

　さいころを5回投げるとき，出た目の和を6で割った余りが1である確率も問題文より $\dfrac{1}{6}$ であるが，この中には素数でない25も含まれるので，出た目の和を6で割った余りが1の素数である確率は $\dfrac{1}{6}$ から，出た目の和が25である確率を引いたものである。

　5回の目の和が25になる組合せは，

ア）1が1回，6が4回　　イ）2が1回，5が1回，6が3回
ウ）3が1回，4が1回，6が3回　　エ）3が1回，5が2回，6が2回
オ）4が2回，5が1回，6が2回　　カ）4が1回，5が3回，6が1回
キ）5が5回

の7通りある。

　さいころを5回投げるときの目の出方は全部で $6^5=7776$ 通りある。

　ア〜キについて，目の出方が何通りあるか調べると，

ア）$\dfrac{5!}{1!4!}=5$ 通り　　イ）$\dfrac{5!}{1!1!3!}=20$ 通り

ウ）$\dfrac{5!}{1!1!3!}=20$ 通り　　エ）$\dfrac{5!}{1!2!2!}=30$ 通り

オ）$\dfrac{5!}{1!2!2!}=30$ 通り　　カ）$\dfrac{5!}{1!3!1!}=20$ 通り

キ）1通り

　よって，さいころを5回投げるとき，出た目の和を6で割った余りが1の素数になる確率は，$\dfrac{1}{6}-\dfrac{5+20+20+30+30+20+1}{7776}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{126}{7776}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{7}{432}=\dfrac{65}{432}$

　ゆえに，求める確率は，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{65}{432}=\dfrac{137}{432}$

参考 5回の目の和が25になる場合をもれなく数え上げるには，すべて6が出たときの和が30であることから，25から30を引いた -5 をどのように振り分けるか考えるとよい。

　そこで，　ア）-5 が1回…1が1回，6が4回
　　　　　　イ）-4 が1回，-1 が1回…2が1回，5が1回，6が3回
　　　　　　ウ）-3 が1回，-2 が2回…3が1回，4が1回，6が3回
　　　　　　エ）-3 が1回，-1 が2回…3が1回，5が2回，6が2回
　　　　　　オ）-2 が2回，-1 が1回…4が2回，5が1回，6が2回
　　　　　　カ）-2 が1回，-1 が3回…4が1回，5が3回，6が1回
　　　　　　キ）-1 が5回…5が5回

　とした。