**着眼点**

(1)と(2)は定義を正しく理解していれば正解できるでしょう。(3)も少し考えればそんなに難しくないと思います。

(4)は①の定義の「一の位の数」の部分で 4 つの場合に場合分けされることに注意しましょう。(5)は鳩の巣原理を使うことに気づくことができればあとは自然にたどりつきたいところです。(6)は 4837 と 2021 の関係に気づけば簡単です。

**解答例**

(1)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(5)$ | 6 | $f(6)$ | 2 | $f(7)$ | 1 | $f(8)$ | 7 | $f(9)$ | 6 | $f(10)$ | 6 |

(2)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(2)$ | 215 | $F(3)$ | 2158 | $F(4)$ | 1586 | $F(5)$ | 5860 | $F(6)$ | 8609 |
| $F(7)$ | 6093 | $F(8)$ | 938 | $F(9)$ | 9380 | $F(10)$ | 3800 | | |

(3)　①の規則から

$$f(n-1)\equiv -f(n)-f(n+1)-f(n+2)+f(n+3) \pmod{10} \quad \cdots \quad (\bigstar)$$

である。したがって，

$$f(4)\equiv -f(5)-f(6)-f(7)+f(8)\equiv -0-3-5+8\equiv 0 \pmod{10}$$
$$f(3)\equiv -f(4)-f(5)-f(6)+f(7)\equiv -0-0-3+5\equiv 2 \pmod{10}$$
$$f(2)\equiv -f(3)-f(4)-f(5)+f(6)\equiv -2-0-0+3\equiv 1 \pmod{10}$$
$$f(1)\equiv -f(2)-f(3)-f(4)+f(5)\equiv -1-2-0+0\equiv 7 \pmod{10}$$

となり， $f(1)=7$ ， $f(2)=1$ ， $f(3)=2$ ， $f(4)=0$ である。

(4)　$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ のときは $F(1)=F(2)=F(3)=\cdots=0$ であるから，周期 1 で周期的である。

逆に， $F(n)$ が周期 1 で周期的であるとする。このとき $F(1)=F(2)$ である。

$f(1)=a$ ， $f(2)=b$ ， $f(3)=c$ ， $f(4)=d$ （ $a$ ， $b$ ， $c$ ， $d$ は 9 以下の負でない整数）とする。

このとき， $f(5)$ の値は

$$a+b+c+d\ ,\quad a+b+c+d-10\ ,\quad a+b+c+d-20\ ,\quad a+b+c+d-30$$

のいずれかである。

$F(1)=F(2)$ より，「 $a=b$ ， $b=c$ ， $c=d$ 」かつ「 $d$ の値は $a+b+c+d$ ， $a+b+c+d-10$ ， $a+b+c+d-20$ ， $a+b+c+d-30$ のいずれか」である。

前者を後者に代入して $a$ ， $b$ ， $c$ を消去すると，

$$d=4d\ ,\quad d=4d-10\ ,\quad d=4d-20\ ,\quad d=4d-30$$

のいずれかが成り立つ。これらを解くと，

$$d=0\ ,\quad d=\frac{10}{3}\ ,\quad d=\frac{20}{3}\ ,\quad d=10$$

$d$ は 9 以下の負でない整数であるから， $d=0$ である。

このとき，$a=b=c=d=0$ すなわち $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ である。

よって，周期 1 で周期的になるのは $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ のときに限る。

(5)　$F(n)$ は整数で，$0 \leqq F(n) \leqq 9999$ であるから，鳩の巣原理により，

$\{F(1),\ F(2),\ F(3),\ \cdots,\ F(10001)\}$

の中にはその値が等しいものが必ず存在する。すなわち，$F(l)=F(l+k)$ となる自然数 $l$ と $k$ が必ずある。そして，$F(l+k)$ 以降は $F(1)$ 以降の値を繰り返す。

一方，$F(l)$ および $F(l+k)$ が決まると，$f(l)$，$f(l+1)$，$f(l+2)$，$f(l+3)$ ならびに $f(l+k)$，$f(l+k+1)$，$f(l+k+2)$，$f(l+k+3)$ が定まり，(★)より $f(l-1)$ および $f(l+k-1)$ が定まる。

したがって，$F(l-1)$ および $F(l+k-1)$ も定まり，$F(l-1)=F(l+k-1)$ である。

以下同様にして，$F(1)=F(k+l)$ まで遡ることができ，すべての自然数 $n$ に対して $F(n)=F(n+k)$ が成り立つ。もちろん，この $k$ は自然数 $n$ によらない。

よって $F(n)$ は周期 $k$ で周期的である。

(6)　$F(1)=2021$ のとき，$f(1)=2$，$f(2)=0$，$f(3)=2$，$f(4)=1$ である。

関数 $g(n)$，$G(n)$ がそれぞれ $f(n)$，$F(n)$ と同じ規則で定義されるとする。

$g(1)=4$，$g(2)=8$，$g(3)=3$，$g(4)=7$ として①の規則を適用すると，

$g(5)=2$，$g(6)=0$，$g(7)=2$，$g(8)=1$

であるから，すべての自然数 $n$ に対して $f(n)=g(n+4)$ が成り立つ。

$G(n)$ を $g(n)$ に対して②のように定義すると，$G(1)=4837$ であり，$F(n)=G(n+4)$ である。

(5)より $G(N)=4837$ となる自然数 $N$ があり，$F(N-4)=G(N)=4837$ である。よって，$n=N-4$ とすればよい。

（参考）表計算ソフトを用いればこのような $n$ を実際に求めることができる。ちなみに，このような $n$ で最も小さいものは $n=1557$ である。