

配点

- (1) 7 点 (2) 4+3 点 (3) 4+4 点 (4) 9 点 (5) 9 点

講評

今回の数学コンテスト問題3はさいころを数回投げて出た目の和が素数になる確率を求めるという問題です。最初の発想は『さいころを n 回投げて出た目の和が素数になる確率は n を大きくすると単調減少する』という予想命題でした。実はこの予想に対する反例は示されていてこの命題は成り立ちません。その中で『さいころを4回投げて出た目の和が素数になる確率は $\frac{1}{3}$ である』ことがわかったのが今回の問題の出題につながりました。これはどうやって示すのか？もちろん場合分けでもできますが素数の性質をうまく使うと比較的かんたんに示せます。ただこのことをすでに知っている人がいたら問題としての面白味がなくなるのであえて4回の場合は出題せず、3回のときと5回のときの確率を求めよという問題にしました。

さいころを1回投げた場合は出る目は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の6通り（そのうち素数は2, 3, 5の3個）でどの目の出る確率も等しい $\left(=\frac{1}{6}\right)$ ので素数となる確率は $\frac{1}{2}$ です。2回投げた場合は目の和は2から12までで $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ の11通りで、そのうち素数は2, 3, 5, 7, 11の5個ですが、和がそれぞれの数になる確率は等しくないので、和が素数である確率は $\frac{5}{11}$ にはなりません。さらに投げる回数を3回、4回と増えていくとますます計算が煩雑になります。それをなんとかすっきり説明できないかと考えて問題を作りました。コンテストの問題としては易しかった(?)ので出来は良く、平均点は40点中の28.4点でした。何より今回満点が15名出たのは予想以上でした。

(1) 素数か素数でないかの判断はそんなに難しくないと思いますが今回の問題では数の表を1段目は1から6まで、2段目は7から12まで…と6個ずつにしたのがポイントです。1段目は2, 3, 5が素数ですが、2段目は7と11が素数、3段目は13と17が素数、4段目は19と23が素数です。5段目は29だけが素数です。1段目以外は一番左の列と右から二番目の列にしか素数はありません。一番左の列は6で割って余り1の数、次は余り2、次は余り3、次は余り4、次は余り5、一番右の列は6の倍数(余り0)の数となり、正の整数全体は0以上の整数 k を用いて $6k+1, 6k+2, 6k+3, \dots, 6k+6$ の6種類に分類されますが、このうち素数になるのは $k=0$ のときの2, 3, 5を除くと一番目の列と五番目の列にしかありません。 $6k+2, 6k+4, 6k+6$ は偶数なので2以外は素数にならず、3の倍数である $6k+3$ も3以外は素数になりません。ただし余り1の場合、余り5の場合でも素数にならないこともあります。 $6k+1$ の場合でも $k=4$ のときの25は素数にならず、 $6k+5$ の場合でも $k=5$ のときの35は素数になりません。この問題はほとんどの人が正解でしたが、ごく一部に○の付け忘れか勘違いしたと思われる人がいました。正答率は99%以上で平均点は6.9点、得点率は99.1%でした。

(2) 前半の表を作るには2回投げたときの目の和を表すには縦横 6×6 の正方形の表を利

用すると分かりやすいでしょう（解答例参照）。全事象は $6^2 = 36$ 通りありますが、和が X になる確率を P とすると、次の表のようになります。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

このような表を確率分布の表といいます。現在の数学Aの教科書にはこのことばは出てきませんが、それぞれの結果に対する確率を表すには便利なので問題に含めて出題しました。なお、表の中の分数は約分してもよいのですが、約分すると後半で和を求めるときに計算ミスをする可能性もあるので約分しない形で正解としています。この表を見ると、和が2の確率と和が12の確率が等しいなど、全体に左右対称形であることがわかります。

この部分の満点は4点で正解率も高く97.8%でした。誤答例としては和が2から12までの確率がすべて等しいとしたもの、それぞれの場合を数え上げる際にミスをしたと思われるものなどでした。

表を作ってしまうと素数の確率は素数の場合を加えればよいので、後半は簡単だと思ったのですが、表を作った（解答欄には確率の表だけで素数の確率という欄がなかった）ことで安心して和が素数になる確率を求め忘れたと思われる答案が20枚以上あったので残念に思いました。解答用紙に解答欄を作っておけばそのような人はもっと少なかったかもしれません。出題者の反省点に加えたいと思います。

和が素数になる確率は和が2, 3, 5, 7, 11の場合を加えればよいので、
 $\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ となります（約分しなくても正解としています）。

後半部分の満点は3点で正解率は71.2%でした。誤答例としては、確率分布の表でそれぞれの確率を約分して出したための通分ミス、欄の見間違い、足し算ミス（?）、そして後半の設問の見落としなどが多かったと思います。(2)の平均点は6.2点で、(2)全体の得点率は88.1%でした。

(3) (2)の確率の表を使うと和が2から12までの場合を6で割った余りで分けることすぐに出せるのですが、丁寧に場合分けして36通り分類した人もいました。ちゃんと書いてあればもちろん正解ですが、枝間に分かれた問題では前の設問を使うことも大切です。コンテストに限らず数学の問題では今回の数学コンテスト問題2のように枝間がなく自由な発想で解いてほしいという問題もありますが、枝間に分けて前の設定をうまく生かして問題を考えることも必要です。もちろん前の設定を使わないという場合もありますが、使えるときは使ってほしいと思います。前半の満点は4点で前半の正解率は91.2%でした。

後半は3回さいころを投げたときの目の和を6で割った余りが1の場合、2の場合、…、0の場合がすべて等しいことを示すということで、一部の人はこの時点で3回さいころを投げた和が3の場合、和が4の場合、…、和が18の場合までの表を作り、和が1の場合、2の場合、0の場合（割り切れる場合）の確率を求めていました。このことは(4)でも生かせるので悪くはないのですが、和が3から18までの確率をすべて求めるのはけっこう大変です。出題者の意図からいうと、前半で2回の和を6で割ったときの余り1から余り0

までの確率がすべて $\frac{1}{6}$ であるということを示しているのです。このことを使って 3 回の和を 6 で割った余りも等しいことを示してほしいと考えて出題しました。2 年生でもまだ授業ではやっていない人もいるかもしれませんが、数学 B で学ぶ数列の内容の中に「数学的帰納法」が出てきます。1 年生以下の人にとっては範囲外なのでこのような出題にしました。数学的帰納法を用いるとすべての自然数 n に対してさいころを n 回振ったときの目の和を 6 で割った余り 1 から 0 について確率が等しくなることを示せます。

ただ気になって減点した答案もありました。例えばこういう説明です。「3 回の目の和を 6 で割った余りは 0 から 5 まで 6 通りあるので確率は等しい」…これは正しいのでしょうか？この説明が正しいのであれば(2)で 2 回さいころを投げたときの目の和は 2 から 12 まで 11 通りあるのでそれぞれの確率は $\frac{1}{11}$ とした結果も正しくなってしまいます。6 通りあるからすべて確率は等しいとはいえません。さらに「2 回の目の和を 6 で割った余りが 1 ～ 0 の確率がすべて等しいから、3 回の和を 6 で割った余りが 1 ～ 0 の確率もすべて等しい」これも説明不足と判断しました。示してほしいのは 2 回の目の和を 6 で割った余りが何であっても（確率 $\frac{1}{6}$ ）、3 回目に出た目の数によって 3 回の目の和を 6 で割った余りが 1 から 0 となる確率は等しい。2 回目までの和の結果を使わないで 3 回目を加えた結果を評価するような説明は説明不足と判断しました。(3)後半の満点は 4 点で正解率は 52.6%，(3)全体の得点率は 75.8% でした。

(4)からがこの問題のポイントです。実は答案の中で最も多かったのは、3 回の和が 3 から 18 までの確率分布の表を作り素数になる場合の確率の和を求めた答案でした。(2)の 2 回の場合と同じ考え方なのでもちろん考え方としては正しいのですが、計算はかなり大変です。和が 2 から 18 までのすべての場合の確率を求めなくてもよいのですが、途中で挫折した人も多かったです（部分点の対象にはしていません）。中には先ほど出てきた確率分布の対称性を用いて全部の確率を求めずに済ませた人もいますし、すべての確率の和が 1 であることを用いて手間を減らした人もいます。また、すべての場合の確率を正しく出しても和を求めるときに計算ミスをして惜しいなという答案もあったのです。

(3)の後半を使うと計算も楽です。3 回の和で出てくる素数のうち 7 と 13 は 6 で割って余り 1 の数であり、6 で割って余り 1 になる確率が $\frac{1}{6}$ でこの場合はすべて素数となります。また、素数のうち、5、11、17 は 6 で割って余り 5 の数であり、6 で割って余り 5 になる確率は $\frac{1}{6}$ でこの場合はすべて素数となります。最後に残る 3 は 6 で割って余り 3 の数であり、3 以外の 9、15 は素数ではなく、和が 3 になるのは 3 回とも 1 のときなので確率 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ となります。よって、素数になる確率は $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{216} = \frac{73}{216}$ となります。

3 回の場合は素数になるのが、(6 で割って余り 1 の場合)+(6 で割って余り 5 の場合)+(和が 3 の場合)です。これが 4 回となると和が 3 の場合がなくなって、和が素数になるの

は(6で割って余り1の場合)+(6で割って余り5の場合)となるので確率が $\frac{1}{3}$ となります。

素数の性質を使うと、さいころを4回以上投げるとき目の和が素数になる確率は $\frac{1}{3}$ を上回らないことが証明できます。というのは、この各段6個ずつの表を使うと素数が現れるのは2段目以降は1列目と5列目に限られ(ほかの列は2か3の倍数になる)、さらに1列目と5列目でも素数にならない場合が出てくるからです。

いくつか別解も紹介します。2回さいころを投げたときの分布を6回使うと3回投げたときの分布が作れます。

3回の和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3回目が1	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
3回目が2		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
3回目が3			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
3回目が4				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
3回目が5					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
3回目が6						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
確率—	$\frac{1}{216}$		$\frac{6}{216}$		$\frac{15}{216}$				$\frac{27}{216}$		$\frac{21}{216}$				$\frac{3}{216}$	

よって、和が素数になる確率は $\frac{1}{216} + \frac{6}{216} + \frac{15}{216} + \frac{27}{216} + \frac{21}{216} + \frac{3}{216} = \frac{73}{216}$

場合分けを用いたこんな方法も

2回の和が2(確率 $\frac{1}{36}$)のとき、3回の和が素数になるのは3回目が1, 3, 5のとき

より、 $\frac{1}{36} \times \frac{3}{6}$

2回の和が3(確率 $\frac{2}{36}$)のとき、3回の和が素数になるのは3回目が2, 4のときよ

り、 $\frac{2}{36} \times \frac{2}{6}$

2回の和が4(確率 $\frac{3}{36}$)のとき、3回の和が素数になるのは3回目が1, 3のときよ

り、 $\frac{3}{36} \times \frac{2}{6}$

以下、同様に計算することにより、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{36} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{36} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{36} \times \frac{2}{6} + \dots \\ &= \frac{3+4+6+8+10+12+10+8+6+4+2}{216} = \frac{73}{216} \end{aligned}$$

(4)の正解率は58.1%で得点率は66.6%でした。

(5)はさいころを5回投げたときの目の和が素数になる確率ですが、(4)との違いは6で割って余り1の場合でも素数でない場合があることです。5回の和は5から30までで、和を6で割った余りが5の場合はすべて素数ですが、余り1の場合の25は素数ではありません。

せん。目の和が7の場合、13の場合、19の場合を加えて求めてもいいのです（そのようにして正解した人もいました）が、目の和を6で割った余りが1の確率が $\frac{1}{6}$ なので $\frac{1}{6}$ から和が25の場合を引いたほうが早いでしょう。また、目の和を6で割った余りが5の場合（5, 11, 17, 23, 29）は確率 $\frac{1}{6}$ ですべて素数なのでそのまま加えます。和が25になる確率を求める場合、25は和の最大値30に近いので、サイコロの目の最大値6に注目してみるといいと思います。

目の最大値6が5個の場合 和が30より不適

目の最大値6が4個の場合 和が24で残り1より、(6, 6, 6, 6, 1)で

$$\frac{5!}{4!} = 5 \text{ 通り}$$

目の最大値6が3個の場合 和が18で残り2個の和が7より、5+2 または 4+3
よって、(6, 6, 6, 5, 2) または (6, 6, 6, 4, 3) で

$$\frac{5!}{3!} \times 2 = 40 \text{ 通り}$$

目の最大値6が2個の場合 和が12で残り3個の和が13より、5が2個の場合と1個
の場合を考え、5+5+3 または 5+4+4

よって、(6, 6, 5, 5, 3) または (6, 6, 5, 4, 4) で

$$\frac{5!}{2!2!} \times 2 = 60 \text{ 通り}$$

目の最大値6が1個の場合 残り4個で和が19より、残り4個は5+5+5+4

よって、(6, 5, 5, 5, 4) で $\frac{5!}{3!} = 20$ 通り

目の最大値6が0個の場合 (5, 5, 5, 5, 5) で1通り

よって、和が25になるのは5+40+60+20+1=126通りで、和が素数になる確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{126}{7776} = \frac{137}{432}$$

(5)の正解率は10.7%で得点率は34.6%でした。

別解としては次のような答案がありました。

〈別解その1〉

和が25になる場合は確率分布の対称性より和が10の場合と等しい。ここで1から6までの整数5個の和が10である場合の数を求める。

正の整数 A, B, C, D, E が $A+B+C+D+E=10$ を満たすのは、 $a=A-1$,
 $b=B-1$, ..., $e=E-1$ とすると、 $a+b+c+d+e=5$ となるので、○が5個と |
(しきり) が4本の並べ替えと考える。

たとえば、 $A=B=C=D=1$, $E=6$ の場合、 $a=b=c=d=0$, $e=5$ となるので
| | | | ○○○○○に対応する。

このような並べ方は、 $\frac{(5+4)!}{5!4!} = 126$ 通り

一般的に、和が25の場合さいころの目は1から6なのでこの方法は使いづらい。ところが、対称性を使って和が10で考えると1+1+1+1+6のように他の目を最小にしても最後の1個は最大で6なので問題がない。（別解終了）

〈別解その2〉

3回投げたときの分布1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1を6回使うと4回投げたときの分布が作れ、さらに4回投げたときの分布を6回使うと5回のときの分布も作ることができる。

5回の和	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5回目が1	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56
5回目が2		1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80
5回目が3			1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104
5回目が4				1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125
5回目が5					1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140
5回目が6						1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146
場合の数	1		15				205		420				780		735	

5回の和	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5回目が1	35	20	10	4	1					
5回目が2	56	35	20	10	4	1				
5回目が3	80	56	35	20	10	4	1			
5回目が4	104	80	56	35	20	10	4	1		
5回目が5	125	104	80	56	35	20	10	4	1	
5回目が6	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1
場合の数			305						5	

この方法で解かれたと予測される答案もあったが、表がなかったので説明不足の感は否めない。解答用紙の表裏でも書ききれないのではないかな。これより先になるとコンテストもパソコン持ち込み可にしなければならないかも（笑）。

4回さいころを投げたときの目の和が素数になる確率が $\frac{1}{3}$ であるということはけっこう有名なことなんでしょうか。もし知っていた（誰かから教えてもらった？）という人がいたら教えてください。

（市立札幌新川高等学校 佐々木 光憲）