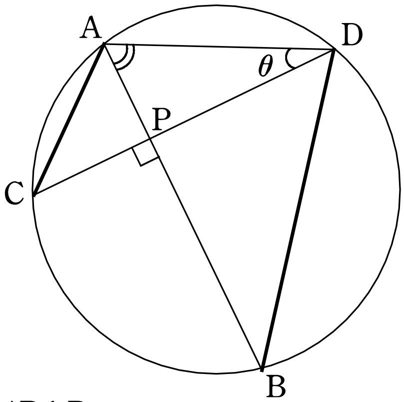
配点　40点

講評

「着眼点」に記したように，本問は“誘導”をつけずに出題しました。その結果，手つかずに終わった答案も多く見られました。途中に不備があり減点されたものも含めると，もっとも多かった答案は，出題者が用意した，“初等幾何”によるものでも，”余弦定理”によるものでも，“ベクトル”によるものでも，“座標”によるものでもなく，“正弦定理”によるものでした。



証明　$\angle \mathrm{ADC}=\theta$ とおくと，$\triangle \mathrm{APD}$ の内角の和が 180° であることから，

$$\angle \mathrm{BAD}=180^\circ-(\angle \mathrm{APD}+\theta)$$
$$=90^\circ-\theta \cdots ①$$

$\triangle \mathrm{ACD}$ で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=2r \qquad \text{すなわち，}\quad \mathrm{AC}=2r\sin\theta$$

$\triangle \mathrm{ABD}$ で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\angle \mathrm{BAD}}=2r \qquad \text{すなわち，}\quad \mathrm{BD}=2r\sin\angle \mathrm{BAD}$$

①より，　$\mathrm{BD}=2r\sin(90^\circ-\theta)$
$=2r\cos\theta$

よって，

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=(2r\sin\theta)^2+(2r\cos\theta)^2$$
$$=4r^2\sin^2\theta+4r^2\cos^2\theta$$
$$=4r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=4r^2$$

ゆえに，$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ の値は一定である。

さて，答案を見て感じたことをいくつか挙げます。

Ⅰ　丁寧な説明を心がけましょう。

ほかの採点者も書いていることと思いますが，自分に都合のよい解釈で話を進めてはいけません。採点者には解答者の頭の中や心の中までは見えないのです。答案用紙に書かれてあることがすべてです。例えば，「$A=B$ かつ $B=C$ かつ $C=D$」であれば「$A=D$」ですが，仮に $B=C$ が成り立つとわかっていても，「$A=B$ かつ $C=D$」だけを述べて「$A=D$」と結論づけるのは説明不足です。

例題　$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，x^3+y^3 の値を求めよ。

解答　$x+y=4$，$xy=1$ が成り立つ。

したがって，　$x^3+y^3=52$

このような答案では，採点者には「なぜ x^3+y^3 が52になるのか」が伝わらないのです。

「$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot1\cdot4=52$」とすることで，「なぜ x^3+y^3 が 52 になるのか」を採点者が読み取れるのです。答案を作成するときは，書かれた言葉や数式だけで他者に伝わるように心がけることが必要です。特に，証明問題は，求値問題と違ってゴール（結論）が見えているので，どのようにゴールにたどり着くのかを丁寧に説明することが求められているのです。

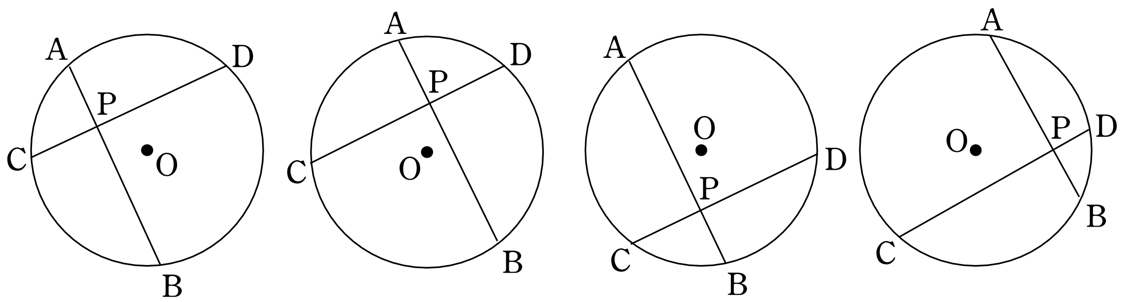
また，問題文で与えられていない新しい文字や記号を設定するときは，それらが何を表すのか，明確に定義してください。「図のように x，y，α を定める」と書かれた答案よりも「AP＝x，BP＝y，∠PAB＝α とおく」と書かれた答案の方が好感が持てます。

Ⅱ　“誘導”も“図”もつけずに出題した意図

“誘導”をつけずに出題した理由は「着眼点」に記したとおりですが，“図”をつけなかった理由は，皆さんがきちんと一般性を担保できるかどうかを見てみたかったからです。

問題文を忠実に図に表現しようとすると，次のような 4 通りの図が考えられます。

【図１】　【図２】　【図３】　【図４】



多くの答案はいずれか１つの図しか描かれていません。きちんと論理的に説明されていれば１つの図でも十分ですが，一般性を失うような説明が多く見られたのは残念です。特に，AP＝CP かつ BP＝DP が成り立ってしまう図を描いてしまい，AC∥BD であると勘違いした答案が多く見られました。確かに，【図１】【図４】であればそう見えてしまうかもしれませんが，【図２】【図３】を見れば平行が成り立たないのは明らかでしょう。

また，【図１】のような図を描いて ∠PBC＝∠OBC－∠OBP とした答案も多く見られました。この等式は【図２】では成り立ちません。左端の図で「$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ が一定」であることが成り立てば他の図でも成り立つのですが，そのこと（一般性は失われない）に触れられていない答案がほとんどでした。

交点 P が線分 AB（または CD ）の中点であると述べられている答案が複数見られたことも残念です。もちろん，AB と CD の交点 P が一方または両方の線分の中点と一致することもありますが，それはあくまでも特殊な場合であって，特殊な場合で成り立つからといって「$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ が一定」であると断定するのは乱暴です。（交点 P の位置に関係なく $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ が一定であれば，それは交点 P が中点のときとも一致するので，一つの目安になりますが，目安でしかありません。）

Ⅲ　定理を正しく理解しているか

まちがいとまではいえませんが，定理を「結果としてだけしか認識していないのかな」

と思われるような答案も多く見られました。代表的なものは，方べきの定理と相似を別のものと捉えているのではないかと感じる答案です。方べきの定理は相似から導かれるものなので，相似があれば説明できるはずです。

方べきの定理に限らず，三角形の内角や外角の二等分線と線分の比の性質やトレミーの定理などは，結果を利用することも大事ですが，どうして成り立つのかも説明できるようにしておきましょう。

Ⅳ　知っていることを闇雲に羅列するのではなく，戦略を立てて臨もう

今回，採点していて一番多かった答案は，

『　△APC に着目して　$AC^2 = AP^2 + CP^2$　…①

　△BPD に着目して　$BD^2 = BP^2 + DP^2$　…②

　①，②より，　$AC^2 + BD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$　』

で行き詰まった答案です。中には，方べきの定理やトレミーの定理も引っ張り出してみたものの，先へ進めることができずに断念した様子がうかがえる答案も多くありました。（そのため，40 点中 5 点の答案が多くなりました。）しかし，公式や定理を思いつくままに並べても解決できません。

この問題では，「$AC^2 + BD^2$ が一定である」を示すことが求められているのです。先述のように，いくつかの場合（図）を想像すれば，図によって AB やCD，AP，BP，CP，DP の長さは変わるので，一定であることを示す道具としてはふさわしくありません。AB や CD，点 P の位置関係が変わっても変わらないものはないかを探すと，それは円の半径 r しかありません。したがって，どうにかして円の半径に結びつけていくという作戦を立てることになるのです。

なお，得点に結びつくものではありませんでしたが，あれこれ計算していくうちに，知ってか知らずしてか，数学Aや数学Ⅱの教科書に出てくる「中線定理（パップスの定理）」や，教科書ではまず見かけない「垂線の定理」にたどり着いた答案もありました。頭や手を動かすことで見えてくる性質や定理もあります。数学コンテストの参加者の中から，将来，柔軟な発想で新しい定理を発見してくれる人物が現れるのでは，と期待させるような答案でした。

（北海道室蘭東翔高等学校　　平間　順宏）