問題５

$\dfrac{9}{31}=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{4}}}$ の右辺のように，分子にはすべて１が入る，はしご状の分数での表し方を $\dfrac{9}{31}$ の連分数展開といい，$[3,\ 2,\ 4]$ と表記する。また，$[1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots]$ のように，一部の数が循環して現れるとき，循環小数と同じように $[\dot{1},\ 2,\ \dot{3}]$ と表し，循環連分数と呼ぶことにする。

たとえば，連分数展開が $[\dot{2}]$ となる数 x は，方程式 $x=\dfrac{1}{2+x}$ を解くことにより求めることができる。

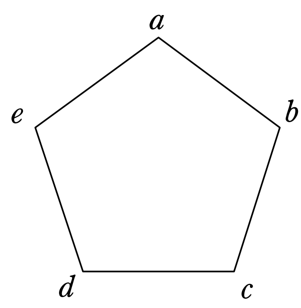
(1)　連分数展開が $[\dot{2}]$，$[\dot{1},\ \dot{2}]$，$[\dot{2},\ \dot{1}]$ となる数を求めなさい。

(2)　循環連分数は，ある整数係数の２次方程式の正の解となることを示しなさい。

(3)　a，b を異なる自然数とし，α を $[\dot{a},\ \dot{b}]$ で表される数とする。また，α' を α を解とする整数係数の２次方程式のもう一つの解とするとき，$[\dot{b},\ \dot{a}]$ で表される数を α' を用いて表しなさい。

(4)　a，b，c をすべてが等しくならないような自然数とする。このとき，$[\dot{c},\ b,\ \dot{a}]$ で表される数における根号の中の式は，a，b，c を全部または一部を入れ替えても変わらないことを示しなさい。

(5)　a，b，c，d，e をすべてが等しくならないような自然数とする。このとき，$[\dot{e},\ d,\ c,\ b,\ \dot{a}]$ で表される数の根号の中の数を a，b，c，d，e で表しなさい。また，この式が変わらないような a，b，c，d，e の入れ替え（全部または一部でもよい）はどのようなものか説明しなさい。必要があれば次の正五角形を用いてもよい。



$\boxed{\textbf{着眼点}}$

本問は２次方程式を解くことや共役の関係，対称性について考えるものでした。

式変形の繊細さや対称性を考えて式を表現する工夫，複雑な代入など普段意識してないものがいっぱいです。

連分数展開はユークリッドの互除法とも関連し，１次不定方程式の具体的な解の構成，無理数の有理数近似にも応用されます。この分野では，ガロアの定理「循環部分を逆順に

したものの共役と元の数との積が -1 となる」をクライマックスとされているようですが，その部分的に一般化した問題です。周期 3 では，定理のような性質が成り立ちませんが，根号の中の式については対称性が成立します。これは，より長い周期でも期待されますが，周期 5 （本問(5)）のように根号の中の数については，回転や線対称（二面体群の元）のみでの不変性が認められます。これは一般でも成立します。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)[1]　$x=[\dot{2}]$ とすると，$x=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\cdots}}=\dfrac{1}{2+x}$ より，　$x^2+2x-1=0$

これを解くと，　$x=-1\pm\sqrt{2}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{2}]=\sqrt{2}-1$

[2]　$x=[\dot{1},\ \dot{2}]$ とすると，$x=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\cdots}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+x}}$ より，　$x=\dfrac{2+x}{3+x}$

分母を払うと，　$x(3+x)=2+x$

整理すると，　$x^2+2x-2=0$　　これを解くと，　$x=-1\pm\sqrt{3}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{1},\ \dot{2}]=\sqrt{3}-1$

[3]　$x=[\dot{2},\ \dot{1}]$ とすると，$x=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+x}}$ より，　$x=\dfrac{1+x}{3+2x}$

分母を払うと，　$x(3+2x)=1+x$

整理すると，　$2x^2+2x-1=0$　　これを解くと，　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{2},\ \dot{1}]=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2)　連分数の計算において，分母は x の 1 次式，分子は x の 1 次式または定数となる。

したがって，連分数を順番に計算すると，方程式は $x=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ （a，d は自然数，b，c は整数）と表せ，$ax^2+bx=cx+d$ となる。$a\neq 0$ から循環連分数は 2 次方程式の解の一つとなる。また，x の条件より x は正の数となる。

ゆえに，循環連分数は，ある整数係数の 2 次方程式の正の解となる。

(3)　$\alpha=[\dot{a},\ \dot{b}]$ より，$\alpha=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{a+\cdots}}}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\alpha}}=\dfrac{b+\alpha}{a(b+\alpha)+1}$

$\alpha\{a(b+\alpha)+1\}=b+\alpha$ より，　$a\alpha^2+ab\alpha-b=0$

これを解くと，　$\alpha=\dfrac{-ab\pm\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$

$\alpha>0$ から，　$\alpha=\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$　ゆえに，　$\alpha'=\dfrac{-ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$

$x=[\dot{b},\ \dot{a}]$ とすると，　$x=\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{a+x}}=\dfrac{a+x}{b(a+x)+1}$

この式を整理して，　$bx^2+abx-a=0$

これを解いて，　$x=\dfrac{-ab\pm\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$

条件より $x>0$ から，　$x=\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$

分子に着目して α' と x の積を考えると，

$$\alpha'x=\frac{-ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}\cdot\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$$

$$=\frac{(-ab)^2-\left(\sqrt{a^2b^2+4ab}\right)^2}{4ab}=\frac{a^2b^2-(a^2b^2+4ab)}{4ab}=\frac{-4ab}{4ab}=-1$$

$x=-\dfrac{1}{\alpha'}$ となるので，　$[\dot{b},\ \dot{a}]=-\dfrac{1}{\alpha'}$

〈別解〉 $\beta=[\dot{b},\ \dot{a}]$ とすると，　$\beta=\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{a+\beta}}$

左辺も右辺も 0 になることはないから，　$\dfrac{1}{\beta}=b+\dfrac{1}{a+\beta}$

$$\frac{1}{\beta}-b=\frac{1}{a+\beta}$$

左辺も右辺も 0 になることはないから，　$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta}-b}=a+\beta$

$$\beta=-a+\frac{1}{\dfrac{1}{\beta}-b}$$

左辺も右辺も 0 になることはないから，　$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{-a+\dfrac{1}{-b+\dfrac{1}{\beta}}}$

よって，　$-\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{1}{-a+\dfrac{1}{-b+\dfrac{1}{\beta}}}=\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{-b+\dfrac{1}{\beta}}}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b-\dfrac{1}{\beta}}}$

一方，条件より　$\alpha=[\dot{a},\ \dot{b}]$ から　$\alpha=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+x}}$ であり，(2)から α も $-\dfrac{1}{\beta}$ も $[\dot{a},\ \dot{b}]$ から生じる 2 次方程式の解となる。また，$\beta>0$ より $-\dfrac{1}{\beta}<0$ から

$\alpha \fallingdotseq -\dfrac{1}{\beta}$ である。

したがって，$\alpha' = -\dfrac{1}{\beta}$　　ゆえに，$\beta = [\dot{b},\ \dot{a}] = -\dfrac{1}{\alpha'}$

(4)　$x = [\dot{c},\ b,\ \dot{a}]$ とすると，$x = \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cdots}}}} = \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + x}}}$ より

よって，方程式は $(bc+1)x^2 + (abc + a - b + c)x - (ab+1) = 0$ となり，この方程式の解の根号の中は，

$$(abc + a - b + c)^2 - 4(bc+1)\{-(ab+1)\} = (abc + a + b + c)^2 + 4$$

これは a，b，c についての対称式となっているので，$[\dot{c},\ b,\ \dot{a}]$ で表される数における根号の中の式は，a，b，c の全部または一部を入れ替えても変わらない。

(5)　$x = [\dot{e},\ d,\ c,\ b,\ \dot{a}]$ とすると，

$$x = \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{e + \cdots}}}}}} = \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + x}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{a + x}{ab + bx + 1}}}} = \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{d + \cfrac{ab + bx + 1}{abc + (bc+1)x + a + c}}}$$

$$= \cfrac{1}{e + \cfrac{abc + (bc+1)x + a + c}{abcd + (bcd + b + d)x + ab + ad + cd + 1}}$$

$$= \frac{abcd + (bde + b + d)x + ab + ad + cd + 1}{abcde + (bcde + bc + be + de + 1)x + abc + abe + ade + cde + a + c + e}$$

$$x = \frac{abcd + (bde + b + d)x + ab + ad + cd + 1}{abcde + (bcde + bc + be + de + 1)x + abc + abe + ade + cde + a + c + e}$$

分母を払い整理すると，

$$(bcde + bc + de + 1)x^2 + (abcde + abc + abe + ade + cde - bcd + a - b + c - d + e)x$$
$$- (ab + ad + cd + 1) = 0$$

この 2 次方程式の解の根号の中は，

$$(abcde + abc + abe + ade + cde - bcd + a - b + c - d + e)^2$$
$$-4(bcde + bc + de + 1)\{-(ab + ad + cd + 1)\}$$
$$= (abcde + abc + bcd + cde + dea + eab + a + b + c + d + e)^2 + 4$$

ここで，$a + b + c + d + e$，$abcde$ は a，b，c，d，e のいずれについても対称

であるから，残りの $abc+bcd+cde+dea+eab$ について考える。

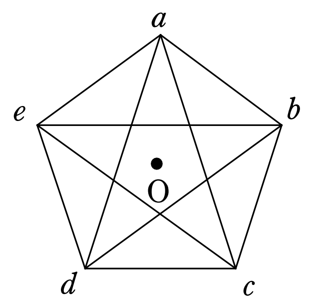
与えられた図より， abc， bcd，…， eab は，五角形でいうと２辺を共有する二等辺三角形とみなせる。文字を入れ替えても変わらないとは，これら三角形の入れ替えを意味する。

五角形の中心 O での回転と， 1 つの頂点と点 O を結ぶ直線での折り返しの組み合わせによる移動では三角形の５組は変わらない。

ここで，二等辺三角形の鈍角部分が入れ替えで鋭角部分になるとする。三角形の回転と線対称の対称性から， abc について $a \to b$， $b \to c$， $c \to a$ を考えると，残りの d， e のいずれかは d， e に変わる。しかし，この場合， dea は deb に変わるが，元の項にはないので不適。

よって，すべての鈍角部分の点が同じ鈍角部分に入れ替わる。このときは，回転と折り返しの対称性より a， b， c が変わらないときを考えると， eab， bcd はそれぞれ同じ eab， bcd となるので d， e も変わらない。

以上より，根号の中の式が，文字を入れ替えても変わらないのは，図でいうと五角形の中心 O での回転と， 1 つの頂点と点 O を結ぶ直線での折り返しの組み合わせによる移動による。



講評

(1)について。(1)のみの解答に近い答案がほぼ半数超あった。正の数であることの説明がないものも多い。主張するには根拠が必要。

(2)について。一般的でないものを取り上げ，示したとしている答案が多い。具体例を取り上げて説明をするのは，数学の解答とは言えません。論理的に説明しましょう。

(3)について。直接求めていく解法と，解と係数の関係（数学Ⅱ）を利用するものもあった。今回の解法その２は，一般にガロアの定理の証明にも使える方法なので，こちらがより本質的な解法といえるでしょう。（別解こそが本質に近づけるチャンス）

(4)について。(5)でもそうだが，対称性を述べるには，ただ式を羅列するのではなく，基本対称式でまとめる（表す）ことが必要。解答例のように，平方完成は式をまとめるのが本質の機能であることを気に留めるべき。

(5)について。ほとんど解答者がおらず完答者が０。解答の最後の部分が一番面白いところなので，楽しみながら読み進んで欲しい。

（小樽双葉高等学校　　古田　和幸）