$\boxed{\text{着眼点}}$

本問は２次方程式を解くことや共役の関係，対称性について考えるものでした。

式変形の繊細さや対称性を考えて式を表現する工夫，複雑な代入など普段意識してないものがいっぱいです。

連分数展開はユークリッドの互除法とも関連し，１次不定方程式の具体的な解の構成，２次無理数の有理数近似にも応用されます。この分野では，ガロアの定理「循環部分を逆順にしたものの共役と元の数との積が -1 となる」をクライマックスとされているようですが，その一般化についての問題です。周期３では，定理のような性質が成り立ちませんが，根号の中の式については対称性が成立します。これはより多い周期でも期待できそうですが，周期５（本問(5)）のように根号の中の数については，回転や線対称（二面体群の元）のみでの不変性が認められます。より一般ではどうでしょうか。一般化できれば面白い性質かも知れません。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)[1]　$x=[\dot{2}]$ とすると，$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}=\dfrac{1}{2+x}$ より，　$x^2+2x-1=0$

これを解くと，　$x=-1\pm\sqrt{2}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{2}]=\sqrt{2}-1$

[2]　$x=[\dot{1},\ \dot{2}]$ とすると，$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}$ より，　$x=\dfrac{2+x}{3+x}$

分母を払うと，　$x(3+x)=2+x$

整理すると，　$x^2+2x-2=0$　　これを解くと，　$x=-1\pm\sqrt{3}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{1},\ \dot{2}]=\sqrt{3}-1$

[3]　$x=[\dot{2},\ \dot{1}]$ とすると，$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+x}}$ より，　$x=\dfrac{1+x}{3+2x}$

分母を払うと，　$x(3+2x)=1+x$

整理すると，　$2x^2+2x-1=0$　　これを解くと，　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

条件より $x>0$ から，　$[\dot{2},\ \dot{1}]=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2)　連分数の計算において，分母，分子ともに x の高々１次式となる。したがって，連分数を順番に計算すると，方程式は $x=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ （a，b，c，d は自然数）と表せ，$ax^2+bx=cx+d$ となる。$a\neq 0$ から循環連分数は２次方程式の解の一つとなる。また，x の条件より x は正の数となる。

ゆえに，循環連分数はある整数係数の２次方程式の正の解となる。

(3)　$\alpha=[\dot{a},\ \dot{b}]$ より，$\alpha=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cdots}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\alpha}}=\dfrac{b+\alpha}{a(b+\alpha)+1}$

$\alpha\{a(b+\alpha)+1\}=b+\alpha$ より，　$a\alpha^2+ab\alpha-b=0$

これを解くと，　$\alpha=\dfrac{-ab\pm\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$

$\alpha>0$ から，　$\alpha=\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$　ゆえに，　$\alpha'=\dfrac{-ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$

$x=[\dot{b},\ \dot{a}]$ とすると，$x=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+x}}=\dfrac{a+x}{b(a+x)+1}$

この式を整理して，　$bx^2+abx-a=0$

これを解いて，　$x=\dfrac{-ab\pm\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$

条件より $x>0$ から，　$x=\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$

分子に着目して α' と x の積を考えると，

$$\alpha' x=\frac{-ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}\cdot\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$$

$$=\frac{(-ab)^2-\left(\sqrt{a^2b^2+4ab}\right)^2}{4ab}=\frac{a^2b^2-(a^2b^2+4ab)}{4ab}=\frac{-4ab}{4ab}=-1$$

$x=-\dfrac{1}{\alpha'}$ となるので，　$[\dot{b},\ \dot{a}]=-\dfrac{1}{\alpha'}$

(4)　$x=[\dot{c},\ b,\ \dot{a}]$ とすると，$x=\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\cdots}}}}=\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+x}}}$ より

よって，方程式は $(bc+1)x^2+(abc+a-b+c)x-(ab+1)=0$ となり，この方程式の解の根号の中は，

$$(abc+a-b+c)^2-4(bc+1)\{-(ab+1)\}=(abc+a+b+c)^2+4$$

これは a，b，c についての対称式となっているので，$[\dot{c},\ b,\ \dot{a}]$ で表される数における根号の中の式は，a，b，c の全部または一部を入れ替えても変わらない。

(5)　$x=[\dot{e},\ d,\ c,\ b,\ \dot{a}]$ とすると，

$$x=\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{e+\cdots}}}}}}=\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+x}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{a+x}{ab+bx+1}}}}=\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{d+\cfrac{ab+bx+1}{abc+(bc+1)x+a+c}}}$$

$$=\cfrac{1}{e+\cfrac{abc+(bc+1)x+a+c}{abcd+(bcd+b+d)x+ab+ad+cd+1}}$$

$$=\frac{abcd+(bde+b+d)x+ab+ad+cd+1}{abcde+(bcde+bc+be+de+1)x+abc+abe+ade+cde+a+c+e}$$

$$x=\frac{abcd+(bde+b+d)x+ab+ad+cd+1}{abcde+(bcde+bc+be+de+1)x+abc+abe+ade+cde+a+c+e}$$

分母を払い整理すると,

$$(bcde+bc+de+1)x^2+(abcde+abc+abe+ade+cde-bcd+a-b+c-d+e)x$$
$$-(ab+ad+cd+1)=0$$

この2次方程式の解の根号の中は,

$$(abcde+abc+abe+ade+cde-bcd+a-b+c-d+e)^2$$
$$-4(bcde+bc+de+1)\{-(ab+ad+cd+1)\}$$
$$=(abcde+abc+bcd+cde+dea+eab+a+b+c+d+e)^2+4$$

ここで, $a+b+c+d+e$, $abcde$ は a, b, c, d, e のいずれについても対称であるから, 残りの $abc+bcd+cde+dea+eab$ について考える。

与えられた図より, abc, bcd, …, eab は, 五角形でいうと2辺を共有する二等辺三角形とみなせる。文字を入れ替えても変わらないとは, これら三角形の入れ替えを意味する。

五角形の中心Oでの回転と, 1つの頂点と点Oを結ぶ直線での折り返しの組み合わせによる移動では三角形の5組は変わらない。

ここで, 二等辺三角形の鈍角部分が入れ替えで鋭角部分になるとする。三角形の回転と線対称の対称性から, abc について $a\to b$, $b\to c$, $c\to a$ を考えると, 残りの d, e のいずれかは d, e に変わる。しかし, この場合, dea は deb に変わるが, 元の項にはないので不適。

よって, すべての鈍角部分の点が同じ鈍角部分に入れ替わる。このときは, 回転と折り返しの対称性より a, b, c が変わらないときを考えると, eab, bcd はそれぞれ同じ eab, bcd となるので d, e も変わらない。

以上より, 根号の中の式が, 文字を入れ替えても変わらないのは, 図でいうと五角形

の中心 O での回転と，１つの頂点と点 O を結ぶ直線での折り返しの組み合わせによる移動による。