着眼点

選挙において，２人の候補者 M，N がそれぞれ m 票，n 票（ただし，$m>n$）を得票した。開票していく過程において，M の得票数が N の得票数を常に上回る確率をもとめるという，ジョセフ・ベルトラン(1822－1900)の投票問題が題材になっている。

(1)と(2)は，以下のように確率を求める問題である。

$$\text{確率 } P(A)=\frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

確率を求める際，場合の数を考えるときには注意が必要である。２枚の硬貨を投げるときに (表，裏) と (裏，表) を区別することに代表されるように，一見同じに見えるものでも，物理的には別のものであると区別して求める必要がある。この問題の場合でも，本来，一つ一つの玉は同じ色でも異なるものとして区別すべきなのだが，その区別をせずに場合の数を求めても，確率の分母と分子をともに同じ色の玉の入れ換え方で割ることになるだけなので，求める確率の値は変わらない。

この試行における３つの事象 A，B，C は，どの２つの事象も同時に起きることは絶対にない（すなわち，事象 A，B，C は互いに排反である）ということに気がついて欲しい。さらに，この試行において３つの事象 A，B，C 以外の事象はあり得ないということにも気がついて欲しい。これらのことを説明する記述があり，

$P_A(m,\ n)+P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)=1$ であるということを利用して，求める３つの確率のうち２つを求めた後，残りを余事象の確率で求めても正解である。

(3) は，じっくり考え，証明を上手に記述できる力を求めている問題である。(3)の証明が不完全だとしても，(4)を正解することは可能である。しかし，(3)が解決しないままでは，(4)の結果はあくまでも推定でしかない。（「問題を正解すること」と「問題を解決すること」の違いを感じとって欲しい。）このように推定された一般式を証明する解決方法として，数学的帰納法を用いることがある。以下にその解答例を紹介する。

証明　$m>0$ かつ $n=0$ のとき，袋の中の玉はすべて白玉なので，$P_A(m,\ n)=1$ である。

これは，$P_A(m,\ n)=\dfrac{m-0}{m+0}=1$ であるから，推定された一般式を満たしている。

次に，$P_A(m,\ n-1)$ と $P_A(m-1,\ n)$ のいずれもが，推定された一般式を満たしていると仮定して，$P_A(m,\ n)$ もまた，必ず推定された一般式を満たしていることを証明する。

白玉 m 個，赤玉 n 個，合計 $(m+n)$ 個の玉が，事象 A を満たすための必要十分条件は，次の[1]，[2]のどちらかが成り立つことである。

[1]　最後に赤玉が出て，かつ，その直前までの白玉 m 個，赤玉 $(n-1)$ 個の合計 $(m+n-1)$ 個の玉が，事象 A を満たしている。

[2]　最後に白玉が出て，かつ，その直前までの白玉 $(m-1)$ 個，赤玉 n 個の合計 $(m+n-1)$ 個の玉が，事象 A を満たしている。

以上のことから，

$$\begin{aligned}
P_A(m,\ n) &= \frac{n}{m+n}\cdot P_A(m,\ n-1)+\frac{m}{m+n}\cdot P_A(m-1,\ n) \\
&= \frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-(n-1)}{m+(n-1)}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{(m-1)-n}{(m-1)+n} \\
&= \frac{n(m-n+1)}{(m+n)(m+n-1)}+\frac{m(m-n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \\
&= \frac{mn-n^2+n+m^2-mn-m}{(m+n)(m+n-1)} \\
&= \frac{m^2-n^2-m+n}{(m+n)(m+n-1)} \\
&= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{m-n}{m+n}
\end{aligned}$$

解答例

白玉をW，赤玉をRとする。

(1)　W 3 個とR 2 個の順列の総数は，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ （通り）

事象 A の条件を満たす取り出し方は，WWWRR，WWRWR の 2 通りだから，

$$P_A(3,\ 2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

事象 B の条件を満たす取り出し方は，WRWWR，WWRRW，WRWRW，WRRWWの 4 通りだから，

$$P_B(3,\ 2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

事象 C の条件を満たす取り出し方は，最初に赤玉を取り出すため，2 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$ （通り）あるから，

$$P_C(3,\ 2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

(2)　W 7 個とR 3 個の順列の総数は，$\dfrac{10!}{7!3!}=120$ （通り）

事象 A の条件を満たす取り出し方は，

[1]　はじめの 6 個がWWRWRWの場合，7 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$ （通り）

[2]　はじめの 5 個がWWRWWの場合，6 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 2 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ （通り）

[3]　はじめの 6 個がWWWRRWの場合，7 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$ （通り）

[4]　はじめの5個がWWWRWの場合，6個目以降の取り出し方はW3個とR2個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$　（通り）

[5]　はじめの4個がWWWWの場合，5個目以降の取り出し方はW3個とR3個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{6!}{3!3!}=20$　（通り）

[1]〜[5]より，事象 A を満たす取り出し方の総数は $4+10+4+10+20=48$ 通りだから，$P_A(7,\ 3)=\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$

事象Bの条件を満たす取り出し方は，

[1]　はじめの2個がWRの場合，3個目以降の取り出し方はW6個とR2個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{8!}{6!2!}=28$　（通り）

[2]　はじめの4個がWWRRの場合，5個目以降の取り出し方はW5個とR1個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{6!}{5!1!}=6$　（通り）

[3]　[1]，[2]のほかは，WWWRRRWWWW，WWRWRRWWWWの2通り

[1]〜[3]より，事象 B を満たす取り出し方の総数は $28+6+2=36$ 通りだから，

$$P_B(7,\ 3)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

事象Cの条件を満たす取り出し方は，最初に赤玉を取り出すため，2個目以降の取り出し方はW7個とR2個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{9!}{7!2!}=36$ 通りあるから，

$$P_C(7,\ 3)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

【注】(1)(2)については，3つの事象 A，B，C は互いに排反であり，
$P_A(m,\ n)+P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)=1$ であることから，求める3つの確率のうち2つを求めた後，残りを余事象の確率で求めてもよい。

(3)　事象 A の根元事象の要素の個数を $n(A)$ と表すことにする。

事象 B の要素に対して，白玉の数と赤玉の数が等しくなったところまでについてのみ，白玉を赤玉に，赤玉を白玉に入れかえるという操作を行うと，その列は一番初めが必ず赤玉になるので，事象 C の要素に属する。よって，$n(B)\leqq n(C)$ が成り立つ。

また，事象 C の要素は，一番初めが赤玉であり，条件 $m>n$ により，白玉の数の方が赤玉の数より多いので，取り出している途中で必ず取り出された白玉の数と赤玉の数が等しくなることがある。この白玉の数と赤玉の数が等しくなったところまでについてのみ，白玉を赤玉に，赤玉を白玉に入れかえるという操作を行うと，その列は一番初めが必ず白玉になるので，事象 B の要素に属する。よって，$n(B)\geqq n(C)$ が成り立つ。

以上により，$n(B)=n(C)$ が成り立つので，$P_B(m,\ n)=P_C(m,\ n)$ が成り立つ。

(4)　W m 個とR n 個の順列の総数は，$\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ 通り。

事象 C は，最初に取り出した玉が赤玉であればよいから，２個目以降の取り出し方はW m 個とR $(n-1)$ 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ 通り。

よって，$P_C(m,\ n)=\dfrac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}}=\dfrac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}\cdot m!n!}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}\cdot m!n!}=\dfrac{n}{m+n}$

(3)より，$P_B(m,\ n)=P_C(m,\ n)$ であり，事象 B と事象 C は互いに排反だから，

$$P_A(m,\ n)=1-\{P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)\}$$
$$=1-2\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{m+n}{m+n}-\frac{2n}{m+n}=\frac{m-n}{m+n}$$