問題３

実数 x を変数とする実数値関数 $f(x)$ は，次の関係式（※）を満たしている。

$$f(2xy)=f(x+1)f(y)-2f(y) \quad \cdots\cdots （※）$$

次の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ が定数関数であるとき，すなわち $f(x)=c$ (c は定数) のとき，定数 c の値を求めなさい。（注：関数 $f(x)$ が定数関数であるとは， x がどのような値であっても $f(x)$ の値が変わらない定数値の関数のことをいう。）

(2) $f(x)$ が定数関数でなく，$f(0)=0$ であるとき，

① 次の値を求めなさい。

（ⅰ） $f(1)$ （ⅱ） $f(2)$ （ⅲ） $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

② $f(-x)=-f(x)$ を示しなさい。

③ $f(-3)$ の値を求めなさい。

④ $f(2020)$ の値を求めなさい。

⑤ $f(\sqrt{2})$ の値を求めなさい。ただし，$f(\sqrt{2})>0$ である。

着眼点

(1) $f(x)$ が定数関数であることから， $f(2xy)=c$ ， $f(x+1)=c$ ， $f(y)=c$ である。

(2) ①～③は， x， y にいろいろな値を代入することによって，適切な値を見つける。

④は， $f(2020)$ を直接求めることは難しいので，$f(x+1)$ と $f(x)$ の関係式（数学Ｂ「数列」における漸化式のような式）を作る。

⑤は， $x=y=\sqrt{2}$ を代入する。

なお，この問題は，$f(x)=2x$ として作問しました。

解答例

(1) $f(x)=c$ （ c は定数）のとき， $f(2xy)=c$ ， $f(x+1)=c$ ， $f(y)=c$ なので，これを（※）に代入すると， $c=c^2-2c$

$c^2-3c=0$ これを解いて， $c=0,\ 3$

(2)①(ⅰ) （※）に $x=0$ を代入すると， $f(0)=f(1)f(y)-2f(y)$

$f(0)=0$ であるから， $f(y)\{f(1)-2\}=0$

$f(y)=0$ または $f(1)=2$

$f(y)=0$ とすると $f(x)$ が定数関数でないことに反するので， $f(1)=2$

（ⅱ） （※）に $x=y=1$ を代入すると， $f(2)=f(2)f(1)-2f(1)$

(ⅰ)より $f(1)=2$ であるから， $f(2)=2f(2)-2\cdot 2$

よって， $f(2)=4$

（ⅲ） （※）に $x=1$ ， $y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると， $f(1)=f(2)f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

（ⅰ），（ⅱ）より $f(1)=2$，$f(2)=4$ であるから，　$2=4f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)$

よって，　$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

② （※）に $x=-\frac{1}{2}$ を代入すると，　$f(-y)=f\left(\frac{1}{2}\right)f(y)-2f(y)$

①の(ⅲ)より $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$f(-y)=f(y)-2f(y)$

したがって，　$f(-y)=-f(y)$

y を x に変えると，　$f(-x)=-f(x)$

③ はじめに，$f(3)$ を求める。

（※）に $x=2$，$y=\frac{1}{2}$ を代入すると，　$f(2)=f(3)f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)$

①の(ⅱ)(ⅲ)より $f(2)=4$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$4=f(3)\cdot 1-2\cdot 1$

したがって，　$f(3)=6$

ゆえに，　$f(-3)=-f(3)=-6$

④ （※）に $y=\frac{1}{2}$ を代入すると，　$f(x)=f(x+1)f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)$

①の(ⅲ)より $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$f(x)=f(x+1)-2$

ゆえに，　$f(x+1)=f(x)+2$　……（※※）

ここで，（※※）を繰り返し用いると，

$$
\begin{aligned}
f(2020)&=f(2019+1)=f(2019)+2\\
&=f(2018+1)+2=f(2018)+2+2\\
&=f(2017+1)+2+2=f(2017)+2+2+2\\
&=\cdots\cdots\\
&=f(1)+2+2+\cdots\cdots+2 \quad (\text{「}+2\text{」が } 2019 \text{ 個})\\
&=2+2\times 2019\\
&=4040
\end{aligned}
$$

⑤ （※※）を（※）に代入すると，　$f(2xy)=\{f(x)+2\}f(y)-2f(y)$

$f(2xy)=f(x)f(y)$

$x=y=\sqrt{2}$ を代入すると，　$f(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=f(\sqrt{2})f(\sqrt{2})$

$f(4)=\{f(\sqrt{2})\}^2$

ここで，（※※）より $f(4)=f(3)+2=f(2)+2+2=8$ であるから，

$8=\{f(\sqrt{2})\}^2$

$f(\sqrt{2})=\pm 2\sqrt{2}$

問題文より $f(\sqrt{2})>0$ であるから，　$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$\boxed{\text{配点}}$ (1) 5点　(2)①(ⅰ) 4点　(ⅱ) 3点　(ⅲ) 3点　② 6点　③ 3点　④ 10点　⑤ 6点

$\boxed{\text{講評}}$

関数方程式の問題は，出来具合が勉強したことがある人とそうでない人との差がはっきりと出てきます。解答用紙のアンケート（記入は任意）からも「簡単」という声もあれば「難しい」という声もありました。数学コンテストでは，関数方程式をよく出題しています。また，大学入試問題として出題されることもあります。関数方程式を勉強したことがない人は，是非，一度勉強してください。

次に，生徒の答案より。

(2)①(ⅰ)について，（※）に $x=0$， $y=1$ を代入して， $f(1)\{f(1)-2\}=0$ より，$f(1)=0$ または $f(1)=2$，定数関数でないので $f(1)=2$ としている解答が多くありました。(1)で定数関数のとき，$f(x)=0$ または $f(x)=3$ を求めたので，$f(1)\fallingdotseq 0$ と考えたのでしょう。しかし，定数関数でなくても $f(1)=0$ の可能性はあるので，定数関数でないからとの理由では点数を与えてはいません。$f(1)=0$ としたとき不適当であることを示してくれれば良いのですが。

(2)④について，【解１】のように x， y に値を代入して， $f(2020)$ の値を求めた生徒が多くいました。最後まで計算して，答えが 4040 となっている答案には点数を与えました。別な解答として，【解２】のように $f(x)=2x$ を予想し，x が自然数のとき，数学的帰納法を用いて証明した解答もあり，正解としました。単に $f(x)=2x$ を予想した解答には点数は与えていません。

【解１】（札幌北高校　井上くんの解答）

（※）に $x=1$， $y=2$ を代入すると　$f(4)=f(2)f(2)-2f(2)=8$

$x=3$， $y=2$ を代入すると　$f(12)=f(4)f(2)-2f(2)=24$

$x=11$， $y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$f(11)=f(12)f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=22$

$x=3$， $y=4$ を代入すると　$f(24)=f(4)f(4)-2f(4)=48$

$x=23$， $y=11$ を代入すると　$f(506)=f(24)f(11)-2f(11)=1012$

$x=505$， $y=2$ を代入すると　$f(2020)=f(506)f(2)-2f(2)=4040$

（ x， y に代入する値は，上記の他にもありました。）

【解２】$f(n)=2n$（ n は自然数）を数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき， $f(1)=2$ となり成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定する。

すなわち， $f(k)=2k$

$n=k+1$ のとき

（※）に $x=k$， $y=1$ を代入すると，

$f(2k)=f(k+1)f(1)-2f(1)$

$f(2k)=2f(k+1)-4$　　　……①

（※）に$x=1$，$y=k$を代入すると，

$$f(2k)=f(2)f(k)-2f(k)$$
$$=4f(k)-2f(k)$$
$$=2f(k) \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入すると　$2f(k)=2f(k+1)-4$

仮定より $f(k)=2k$ を代入すると

$$4k=2f(k+1)-4$$
$$f(k+1)=2(k+1)$$

よって，$n=k+1$のとき成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n に対して，$f(n)=2n$となる。

したがって，$f(2020)=4040$

最後に，作問に関して，$f(x)=2x$ として作問したことに多くの生徒が気がついたようです。数学オリンピックの関数方程式の問題をみると，複雑な方程式であっても，関数は $f(x)=cx$ であったり，定数関数であったりと関数は簡単な式であることが多いように思いました。例年，多くの数学コンテストの参加生徒から，「関数方程式の問題は楽しい」との評価をもらっていますが，今年の問題は楽しめたでしょうか。今後も，生徒が楽しめる問題を心がけ作問するので，多くの生徒が数学コンテストに参加することを願っています。

（北海道札幌西陵高等学校　大和　達也）