着眼点

(1)　$f(x)$ が定数関数であることから，$f(2xy)=c$，$f(x+1)=c$，$f(y)=c$ である。

(2)　①～③は，x，y にいろいろな値を代入することによって，適切な値を見つける。

　④は，$f(2020)$ を直接求めることは難しいので，$f(x+1)$ と $f(x)$ の関係式（数学Ｂ「数列」における漸化式のような式）を作る。

　⑤は，$x=y=\sqrt{2}$ を代入する。

なお，この問題は，$f(x)=2x$ として作問しました。

解答例

(1)　$f(x)=c$（c は定数）のとき，$f(2xy)=c$，$f(x+1)=c$，$f(y)=c$ なので，これを（※）に代入すると，　$c=c^2-2c$

$c^2-3c=0$　　これを解いて，　$c=0,\ 3$

(2)①(ⅰ)　（※）に $x=0$ を代入すると，　$f(0)=f(1)f(y)-2f(y)$

$f(0)=0$ であるから，　$f(y)\{f(1)-2\}=0$

$f(y)=0$　または　$f(1)=2$

$f(y)=0$ とすると $f(x)$ が定数関数でないことに反するので，$f(1)=2$

(ⅱ)　（※）に $x=y=1$ を代入すると，　$f(2)=f(2)f(1)-2f(1)$

(ⅰ)より $f(1)=2$ であるから，　$f(2)=2f(2)-2\cdot 2$

よって，　$f(2)=4$

(ⅲ)　（※）に $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，　$f(1)=f(2)f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(ⅰ)，(ⅱ)より $f(1)=2$，$f(2)=4$ であるから，　$2=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

よって，　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

②　（※）に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると，　$f(-y)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(y)-2f(y)$

①の(ⅲ)より $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$f(-y)=f(y)-2f(y)$

したがって，　$f(-y)=-f(y)$

y を x に変えると，　$f(-x)=-f(x)$

③　はじめに，$f(3)$ を求める。

（※）に $x=2$，$y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，　$f(2)=f(3)f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

①の(ⅱ)(ⅲ)より $f(2)=4$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$4=f(3)\cdot 1-2\cdot 1$

したがって，　$f(3)=6$

ゆえに，　$f(-3)=-f(3)=-6$

④　（※）に $y=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，　$f(x)=f(x+1)f\left(\dfrac{1}{2}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

①の(iii)より $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ であるから，　$f(x)=f(x+1)-2$

ゆえに，　$f(x+1)=f(x)+2$　……（※※）

ここで，（※※）を繰り返し用いると，

$$
\begin{aligned}
f(2020)&=f(2019+1)=f(2019)+2\\
&=f(2018+1)+2=f(2018)+2+2\\
&=f(2017+1)+2+2=f(2017)+2+2+2\\
&=\cdots\cdots\\
&=f(1)+2+2+\cdots\cdots+2 \quad (\text{「}+2\text{」が 2019 個})\\
&=2+2\times 2019\\
&=4040
\end{aligned}
$$

⑤　（※※）を（※）に代入すると，　$f(2xy)=\{f(x)+2\}f(y)-2f(y)$

$f(2xy)=f(x)f(y)$

$x=y=\sqrt{2}$ を代入すると，　$f(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=f(\sqrt{2})f(\sqrt{2})$

$f(4)=\{f(\sqrt{2})\}^2$

ここで，（※※）より $f(4)=f(3)+2=f(2)+2+2=8$ であるから，

$8=\{f(\sqrt{2})\}^2$

$f(\sqrt{2})=\pm 2\sqrt{2}$

問題文より $f(\sqrt{2})>0$ であるから，　$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$