着眼点

基盤の目状の通路の通り方が何通りあるかを求める問題。場合の数の問題なので，解き方としては順列や組合せなど計算で求める方法と数え上げで求める方法の二つが考えられるが，どちらの方法を使ってもいい。ただし，数え上げの場合は全部数え上げるとなると膨大な場合分けが必要になるので，対称性を使ったりして上手に求めてほしい。こちらが用意した解答を上回るエレガントな解答を期待して出題した。

(1)　同じものを含む順列の問題なので易しいと思うがどうだろうか。他の解法もある。

(2)　2人が途中で出会うとすると，どこの点で出会うのか。遠回りをしないのでちょうど双方から等距離の点で出会うはずである。あとは場合分けの計算。

(3)　AからBに行ってBからAに戻る移動なので，同じ点を通ってよいのなら往路の移動の場合の数の2乗となるが，同じ点を通らないので，個々の往路の通り方に対して復路の通り方を考えなければならない。ここで問題となるのは，往路の通り方によっては復路で同じ点を通らなければBに戻れない場合があるということである。ここで使われる原理は以下である（証明は求めていない）。

「一般の$(m,\ n)$型通路において，左上の点Aと右下の点Bを結んだ線分の結合（境界）によって通路上の点は2つに分けられる。通路上の点は境界によって2つの部分（領域）に分けられるので，境界にない2つの点が同じ領域にないとき2つの点を境界上の点を通らずに線分で結ぶことはできない」

この問題の場合，往路の最初の移動が横方向で最後の移動が縦方向の場合，同じ点を通らないので復路の最初の移動は縦方向で，復路の最後の移動方向は横方向になり，復路の1番目の点（点Bの次）と復路の最後（点Aの手前）は同じ領域に属するので結ぶことができる。往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合も同様である。

しかし，往路の最初の移動が横方向で最後の移動も横方向の場合，復路の最初が縦方向，最後も縦方向になるため，復路の最初の点と最後の点は同じ領域に属さないので，境界上の点を通らずに結ぶことはできない。復路の最初が縦方向，最後が縦方向の場合も同様である。このことを踏まえると

①　往路の最初と最後の方向が異なるとき境界を通らないような復路をとることができる。正解は多数ある。

②　往路の最初と最後の方向が同じとき往路上の点を通らない復路はとることができない。正解は多数ある。

③　上の内容を図解を含めて説明してくれればＯＫ

【往路の点を通らずに復路を引けない例】

(4)　(5，2)型の場合，往路は$\dfrac{7!}{5!2!}=21$通りあるが，そのうち，往路の最初と最後が同

じ向きの場合，往路上の点を通らない復路を取ることができないので，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合と，最初が縦方向で最後が横方向の場合について，それぞれ復路のとり方が何通りあるか調べるとよい。

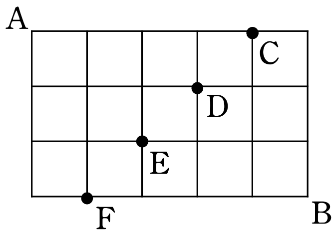
(5)　(5，3) 型の場合，往路は $\dfrac{8!}{5!3!}=56$ 通りあるが，復路が取れない場合を除いて，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合と，最初が縦方向で最後が横方向の場合について，復路のとり方が何通りあるかを調べるとよい。

解答例

(1)　縦方向の移動を↓，横方向の移動を→で表すと，点Aら点Bへの移動の仕方は，↓5個，→3個を並べる順列の総数に等しいので，$\dfrac{8!}{5!3!}=56$ 通り。

別解　8回の移動のうち，どの3回縦方向に移動するかを決めたら残りの5回は横方向に移動すればよいので，移動の仕方の総数は，${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 通り。

(2)　新一と研二が出会うのは，2点A，Bから等しい距離にある点であるので，点Aからの距離も点Bからの距離も4である点（右図のC，D，E，F）である。



[1]　点Cで出会う場合　　$1\cdot\dfrac{4!}{1!3!}\times\dfrac{4!}{1!3!}\cdot1=16$ 通り

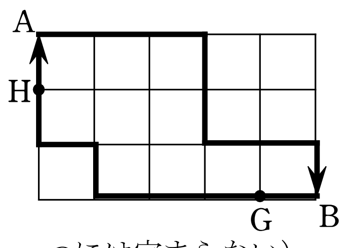
[2]　点Dで出会う場合　　$\dfrac{4!}{3!1!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}=576$通り

[3]　点Eで出会う場合　　$\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{3!1!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=576$通り

[4]　点Fで出会う場合　　$\dfrac{4!}{1!3!}\cdot1\times1\cdot\dfrac{4!}{1!3!}=16$ 通り

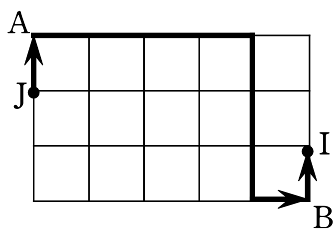
よって，[1]～[4]より，$16+576+576+16=1184$ 通りある。

(3)①　往路と復路で同じ点を通らずに2点A，B間を往復するのは，例えば右図の場合である。



往路の最初の移動の方向と往路の最後の移動の方向が異なっていれば，復路の最初に移動する点Gと復路の最後（点Aに戻る直前）の点Hは境界の同じ側にあるので，線分で結ぶことができる。（正答はこれ以外にも多数あり，一つには定まらない）

②　往路で通った点を通らずに復路で点Bから点Aまで行くことができないのは，往路の最初の移動と最後の移動が同じ方向のときであり，たとえば右図の場合である。



往路の最初と最後が→の場合，復路の最初と最後も↑となって，復路の最初に移動する点Iと復路の最後の点Jは境界の同じ側にないので，境界を通らずには線分で結ぶことができない。

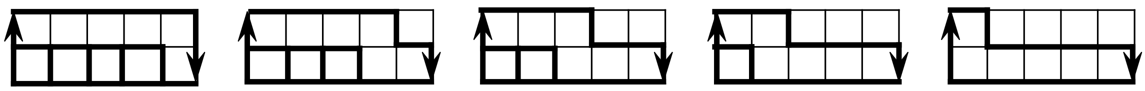
（正答はこれ以外にも多数あり，一つには定まらない）

③　往路の最初が横方向（→）で最後も横方向とすると，復路は往路と同じ点を通れないので，復路の最初も最後も縦方向（↑）となる（②の図参照）。

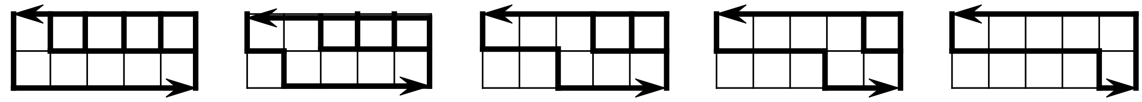
往路の線分を結んでできる境界線によって図形の点は2つの領域に分かれ，復路の最初の点と最後の点は同じ領域に入らないので，往路の点を通らずに復路を結ぶことはできない。往路の最初も最後も縦方向の場合も同様である。

(4)　(5，2)型通路の場合，点Aから点Bに移動する仕方の総数は $\dfrac{7!}{5!2!}=21$通り。

このうち，往路と復路で同じ点を通らないのは，往路の最初が縦方向で最後が横方向のとき（5通り）及び往路の最初が横方向で往路の最後が縦方向のとき（5通り）であるので，それぞれの場合について可能な復路の取り方が何通りあるかを調べればよい。



5通り　　4通り　　3通り　　2通り　　1通り

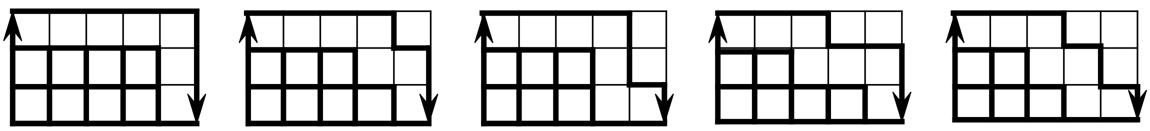


5通り　　4通り　　3通り　　2通り　　1通り

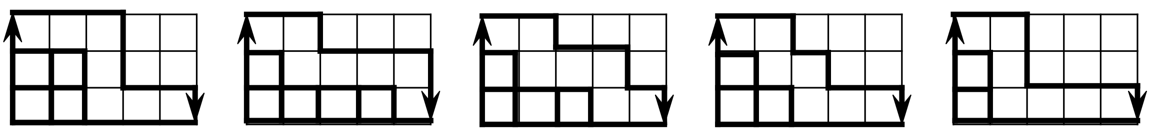
よって，復路で往路と同じ点を1つも通らずに点Bから点Aまで移動するような移動の仕方の総数は $(5+4+3+2+1)\times2=30$ 通り。

(5)　(5，3)型通路の場合，点Aから点Bに移動する仕方の総数は $\dfrac{8!}{5!3!}=56$通り。

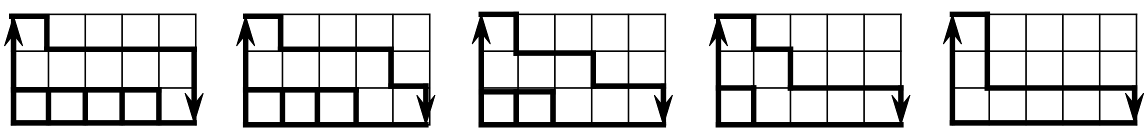
このうち，往路と復路で同じ点を通らないのは，往路の最初が横方向で最後が縦方向のとき（15通り）及び往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合（15通り）であるので，それぞれの場合について可能な復路の取り方が何通りあるかを調べればよい。対称性を考えると前者と後者は同数なので，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合を考えて2倍すればよい。



15通り　　14通り　　10通り　　12通り　　9通り



6通り　　9通り　　7通り　　5通り　　3通り



5通り　　4通り　　3通り　　2通り　　1通り

よって，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合，復路の総数は

$15+14+10+12+9+6+9+7+5+3+5+4+3+2+1=105$ 通り

であり，対称性より往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合の復路も同数 105 通りある。よって，全体では $105 \times 2 = 210$ 通りある。