着眼点

今回の数学コンテストは平成 31 年（ 2019 年）に行われる第 37 回のコンテストになるので， 31 や 2019 ， 37 を用いた問題をつくりたいと思ったところ，

$$\sqrt{37}=6.08276\cdots,\quad \sqrt{2019}=44.93328\cdots$$

であることから，以前同様の問題を解いたことを思い出し，肉付けをして作成した問題です。（ちなみに， 31 ， 37 は素数ですが， 2019 は素数ではありません。）

問題文にある $\{x\}$ はいわゆる「小数部分」ですが，これをどう評価していくか（不等式を用いるかどうか，不等式ならばどんな不等式か）が鍵を握ります。

解答例

(1) $6.01^2=36.1201$ ， $6.1^2=37.21$ であることに着目して

$36.1201<37<37.21$ より $\quad\sqrt{36.1201}<\sqrt{37}<\sqrt{37.21}$

よって $\quad 6.01<\sqrt{37}<6.1$

したがって $\quad 0.01<\sqrt{37}-6<0.1$

よって， $\quad 0.01<\{\sqrt{37}\}<0.1$

ゆえに， $\{\sqrt{37}\}$ は小数第 2 位に初めて 0 でない数が現れる。

(2) $44.9^2=2016.01$ ， $44.99^2=2024.1001$ であることに着目して

$2016.01<2019<2024.1001$ より $\quad\sqrt{2016.01}<\sqrt{2019}<\sqrt{2024.1001}$

よって $\quad 44.9<\sqrt{2019}<44.99$

したがって

$$2019-44.99<2019-\sqrt{2019}<2019-44.9$$

$$1974.01<2019-\sqrt{2019}<1974.1$$

$$0.01<(2019-\sqrt{2019})-1974<0.1$$

$$0.01<\{2019-\sqrt{2019}\}<0.1$$

ゆえに， $\{2019-\sqrt{2019}\}$ は小数第 2 位に初めて 0 でない数が現れる。

(3) $\sqrt{N}$ の整数部分を k とおくと， $N\geqq 1$ より $k\geqq 1$ であり，条件から

$$k+0.01\leqq\sqrt{N}<k+0.1$$

各辺を 2 乗して $\quad k^2+0.02k+0.0001\leqq N<k^2+0.2k+0.01$

各辺から k^2 を引くと $\quad 0.02k+0.0001\leqq N-k^2<0.2k+0.01$

$N-k^2=m$ とおくと， m は整数で $\quad 0.02k+0.0001\leqq m<0.2k+0.01$ …①

$0\leqq 0.02k+0.0001<1$ とすると， k が自然数であることから， $1\leqq k\leqq 49$

ここで， $k\leqq 4$ とすると $\quad 0.2k+0.01\leqq 0.2\cdot 4+0.01<1$

であるから，①を満たす整数 m は存在しない。よって，①を満たす整数 m が存在するためには $k\geqq 5$ が必要である。

そこで，①において $k=5$ とすると $\quad 0.1001\leqq m<1.01$

となるので， $m=1$ はこれを満たす。

ゆえに， $N=k^2+m$ から，求める最小の N は $\quad N=5^2+1=26$

(4) ①において， $0.2k+0.01\leqq 2$ となる k の範囲は $k\leqq 9$ であるから，①を満たす整数 m がちょうど 1 個である条件は $5\leqq k\leqq 9$ である。

よって， $5\leqq k\leqq 9$ のとき，①を満たす整数 m は $m=1$ であるから，

$N=k^2+m=k^2+1$ は $k=9$ で最大となり，そのとき $N=9^2+1=81$

これは小さい方から数えて $9-5+1=5$ 番目である。

また，①を満たす整数 m が $m=1,\ 2$ である k の範囲は

$$0.02k+0.0001 \leqq 1,\quad 2<0.2k+0.01 \leqq 3$$

と， $10 \leqq k$ より， $10 \leqq k \leqq 14$

よって， $10 \leqq k \leqq 14$ のとき， 1 つの k に対して 2 つの m が定まり， $N=k^2+m$ は $k=14$ ， $m=2$ のとき最大となり， $N=14^2+2=198$

これは， $10 \leqq k \leqq 14$ のとき小さい方から数えて $(14-10+1)\times 2=10$ 番目であるから，通算（ $5 \leqq k \leqq 14$ ）では15 番目である。

さらに，①を満たす整数 m が $m=1,\ 2,\ 3$ である k の範囲は

$$0.02k+0.0001 \leqq 1,\quad 3<0.2k+0.01 \leqq 4$$

と， $15 \leqq k$ より， $15 \leqq k \leqq 19$

よって， $15 \leqq k \leqq 19$ のとき， 1 つの k に対して 3 つの m が定まり， $N=k^2+m$ は $k=19$ ， $m=3$ のとき最大となり， $N=19^2+3=387$

これは， $15 \leqq k \leqq 19$ のとき小さい方から数えて $(19-15+1)\times 3=15$ 番目であるから，通算（ $5 \leqq k \leqq 19$ ）では 30 番目である。

次に， $k=20$ とすると，①は $0.4001 \leqq m<4.01$ となり，これを満たす整数 m は $m=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 4 個である。

$m=1$ とすると， $N=k^2+m=20^2+1=401$ であり，これは $k=20$ を満たす N の中で最小となることから， $N=401$ は小さい方から数えて 31 番目である。

(5) $\sqrt{N}$ の整数部分を k とおくと $k \geqq 0$ であり，条件から

$$k+0.001 \leqq \sqrt{N}<k+0.01$$

各辺を 2 乗して $\quad k^2+0.002k+0.000001 \leqq N<k^2+0.02k+0.0001$

各辺から k^2 を引くと $\quad 0.002k+0.000001 \leqq N-k^2<0.02k+0.0001$

$N-k^2=m$ とおくと， m は整数で $\quad 0.002k+0.000001 \leqq m<0.02k+0.0001$ …②

ここで， $k \leqq 49$ とすると $\quad 0<0.002k+0.000001$ ， $0.02k+0.0001<1$

であるから，②を満たす整数 m は存在しない。よって，②を満たす整数 m が存在するためには $k \geqq 50$ が必要である。

そこで，②において $k=50$ とすると $0.100001 \leqq m<1.0001$ となるので， $m=1$ はこれを満たす。

ゆえに， $N=k^2+m$ から，求める最小の N は $\quad N=50^2+1=2501$

(6) ②において， $0.02k+0.0001 \leqq 2$ となる k の範囲は $k \leqq 99$ であるから，②を満たす整数 m がちょうど 1 個である条件は $50 \leqq k \leqq 99$ である。

よって， $50 \leqq k \leqq 99$ のとき，②を満たす整数 m は $m=1$ であるから，$k=99$ で $N=k^2+m=k^2+1$ は最大となり，それは小さい方から数えて $99-50+1=50$ 番目である。

また，②を満たす整数 m が $m=1,\ 2$ である k の範囲は

$$0.002k+0.000001 \leqq 1,\quad 2<0.02k+0.0001 \leqq 3$$

と， $100 \leqq k$ より， $100 \leqq k \leqq 149$

よって， $100 \leqq k \leqq 149$ のとき， 1 つの k に対して 2 つの m が定まる。

100 から数えて 25 番目は 124 であることから， $100 \leqq k \leqq 149$ である k に対して，小さい方から 50 番目の N が，通算して 100 番目に小さい N である。

よって，求める N は $k=124$ ， $m=2$ のときの $N=124^2+2=15378$ で，これが通算して 100 番目に小さい。