着眼点

(1)　x, y, z に色々な値を代入することによって適切な値を見つける。

(2)　$a<b$ より $b=a+s$（ただし，$s>0$）とする。

(3)　(2)より，$f(x)$ は増加関数である。

(4)　関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めることになる。

この問題は，$F(x,\ y)=2x-y$ として作問しました。

解答例

(1)① (Ⅰ)(Ⅱ)より，

$$\begin{aligned} F(0,\ 1) &= -F(1,\ 0)+0+1 \\ &= -2+0+1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

② (Ⅲ)に $z=0$ を代入すると，　$F(x,\ y)=F(x,\ y)+F(0,\ 0)$

よって，　$F(0,\ 0)=0$

③ $F(1,\ 1)$ の値を求める。

(Ⅱ)に $x=y=1$ を代入すると，

$$F(1,\ 1)=-F(1,\ 1)+1+1$$
$$F(1,\ 1)=1$$

(Ⅲ)より，

$$\begin{aligned} F(2,\ 1) &= F(1+1,\ 1) \\ &= F(1,\ 1)+F(1,\ 0) \\ &= 1+2=3 \end{aligned}$$

④ (Ⅲ)より，

$$\begin{aligned} F(1,\ 0) &= F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ 0\right) \\ &= F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)+F\left(\frac{1}{2},\ 0\right) \end{aligned}$$

$$2=2F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$$

よって，　$F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)=1$

⑤ (Ⅲ)より，

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2},\ 1\right) &= F\left(0+\frac{1}{2},\ 1\right) \\ &= F(0,\ 1)+F\left(\frac{1}{2},\ 0\right) \\ &= -1+1=0 \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned} F(0,\ 0) &= F(1+(-1),\ 0) \\ &= F(1,\ 0)+F(-1,\ 0) \end{aligned}$$

ゆえに，　$0=2+F(-1,\ 0)$

よって，　$F(-1,\ 0)=-2$

(2)　$a<b$ より，ある正の数 s が存在し，$b=a+s$ とおける。

(Ⅲ)より，

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a+s) \\ &= F(a+s,\ 4) \\ &= F(a,\ 4)+F(s,\ 0) \\ &= f(a)+F(s,\ 0) \end{aligned}$$

ここで，(Ⅳ)より，$F(s,\ 0)>0$ となるので

$$f(b)>f(a)$$

よって，$a<b$ のとき，　$f(a)<f(b)$

(3)　(2)より，$-2\leqq x\leqq 4$ のとき，$f(-2)\leqq f(x)\leqq f(4)$ となるので，$f(-2)$と$f(4)$の値を求めればよい。

$f(-2)=F(-2,\ 4)$ を求めるために

まず，　$F(0,\ 4)=F(-2+2,\ 4)$

$=F(-2,\ 4)+F(2,\ 0)$

$F(-2,\ 4)=F(0,\ 4)-F(2,\ 0)$

ここで，$F(2,\ 0)=F(1,\ 0)+F(1,\ 0)=2+2=4$

次に，　$F(0,\ 4)=-F(4,\ 0)+2+0$

$=-\{F(2,\ 0)+F(2,\ 0)\}+2$

$=-(4+4)+2=-6$

ゆえに，　$F(-2,\ 4)=-6-2=-8$

(Ⅱ)に $x=y=4$ を代入すると，

$F(4,\ 4)=-F(4,\ 4)+4+4$

$F(4,\ 4)=4$

よって，　$-8\leqq f(x)\leqq 4$

(4)　$h(x)=F(x,\ 0)$ とおくと

$h(x+y)=F(x+y,\ 0)$

$=F(x,\ 0)+F(y,\ 0)$

$=h(x)+h(y)$　　　　より，

$h(x)=cx$（c は定数）となる。　……（☆）

$h(1)=F(1,\ 0)=2$ より　　$h(x)=2x$

$f(x)=F(x,\ 4)$

$=F(x,\ 0)+F(0,\ 4)+4$

$=h(x)-h(4)+4$

$=2x-8+4$

$=2x-4$

次に，$g(x)=F(4,\ x)$

$=-F(x,\ 4)+x+4$

$=-f(x)+x+4$

$=-(2x-4)+x+4$

$=-x+8$

よって，$f(x)\{g(x)-1\}=(2x-4)(-x+7)$

$$=-2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

ゆえに，$-2\leqq x\leqq 4$より，$x=4$のとき，最大値12

$x=-2$のとき，最小値-72

【別解】$F(x,\ y)=2x-y$ の決定について，次のように求めることができる。

条件(Ⅲ)において，$x=0$ とすると

$F(z,\ y)=F(0,\ y)+F(z,\ 0)$

z を x に代えると

$$F(x,\ y)=F(0,\ y)+F(x,\ 0)$$ となり

$F(x,\ y)$ は変数分離している関数である。

条件(Ⅱ)において，$y=0$ とすると

$$F(0,\ x)=-F(x,\ 0)+x$$

となるので，$F(x,\ y)$ は関数 $F(x,\ 0)$ のみで表すことができる。

条件(Ⅲ)において，$y=0$ とすると

$$F(x+z,\ 0)=F(x,\ 0)+F(z,\ 0)$$ となり

$F(x,\ 0)=cx$（c は定数）となる。

以上より，$F(x,\ y)=ax+by$ とおくことができ，$F(1,\ 0)=2$，(1)①で求めた $F(0,\ 1)=-1$

より　　$a=2$，$b=-1$

ゆえに　　$F(x,\ y)=2x-y$

つまり，$f(x)=2x-4$，$g(x)=-x+8$ となる。

（☆）についての証明１（数学Ⅲをつかう）

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \quad \cdots\cdots①$$

また，(2)の設問より，$a<b$ のとき $h(a)<h(b)$　……②

①より，すべての有理数 x に対して，$h(x)=cx$ を示す。

すべての自然数 n に対して

$$c=h(1)=h\left(\frac{n}{n}\right)=h\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)=h\left(\frac{1}{n}\right)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+h\left(\frac{1}{n}\right)=nh\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$h\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}$$

すべての自然数 m に対して

$$h\left(\frac{m}{n}\right)=h\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)=h\left(\frac{1}{n}\right)+h\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+h\left(\frac{1}{n}\right)=mh\left(\frac{1}{n}\right)=c\frac{m}{n}$$

①において，$y=-x$ とすると

$$h(-x)=-h(x)$$

となるので，$\dfrac{m}{n}$ が負の有理数であっても，$h\left(\dfrac{m}{n}\right)=c\dfrac{m}{n}$ は成り立つ。

次に，実数 α に対して下から α に収束する有理数列 $\{p_n\}$ と上から α に収束する有理数列 $\{q_n\}$ が存在する。

（例：$p_n=\dfrac{[10^n\alpha]}{10^n}$，$q_n=-\dfrac{[-10^n\alpha]}{10^n}$）

ただし，$\{p_n\}$ は単調増加列，$\{q_n\}$ は単調減少列とする。

すなわち，$p_1<p_2<\cdots\cdots<p_n<\cdots\cdots<\alpha$，$q_1>q_2>\cdots\cdots>q_n>\cdots\cdots>\alpha$

$\lim\limits_{n\to\infty}(p_n-q_n)=0$ とする。

②より，すべての自然数 n に対して，$h(p_n)<h(\alpha)<h(q_n)$

ゆえに，$cp_n<h(\alpha)<cq_n$ である。

ここで，$n\to\infty$ とし，はさみうちの原理を用いると，$h(\alpha)=c\alpha$

よって，実数 x に対して，$h(x)=cx$ がいえる。

（☆）についての証明２（数学Ⅲをつかわない）

任意の実数 x をとり固定する

②より，$p \leqq x \leqq q$ を満たす任意の有理数 p，q に対し

$$h(p) \leqq h(x) \leqq h(q)$$

ゆえに，$cp \leqq h(x) \leqq cq$

すなわち，$p \leqq \dfrac{h(x)}{c} \leqq q$　（ただし，$c>0$）

$h(x) \fallingdotseq cx$ と仮定すると，$\dfrac{h(x)}{c}<x$ または $\dfrac{h(x)}{c}>x$ である。

$\dfrac{h(x)}{c}<x$ のとき，$\dfrac{h(x)}{c}<p \leqq x$ を満たす有理数 p をとると

$p \leqq \dfrac{h(x)}{c}<p$ となり矛盾する。

有理数 q について，また，$\dfrac{h(x)}{c}>x$ についても同様である。

よって，$h(x)=cx$ である。