問題５

2 種類以上の数字を並べてできる数を考える。（例えば 111 は考えない）

このとき，次の計算（これを「操作 K 」という）を繰り返し行っていく。

操作 K ：各位にある数字を並べ替えてできる，最大の数 M と最小の数 m を作り，M から m を引く。（最高次が 0 になってもよい）

次の問いに答えなさい。

(1)　10 進数(あ) 110，9 進数(い) $218_{(9)}$ について，それぞれ操作 K を 7 回行い，その結果を解答用紙の欄に記入しなさい。

(あ)　$\boxed{110} \to \boxed{99} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{}$

(い)　$\boxed{218_{(9)}} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{} \to \boxed{}$

今，2 種類以上の数字を並べてできる n 進数 $D_{(n)}$ について，$D_{(n)}$ を n 進法で表したときに得られる数字の種類と個数が $D_{(n)}$ の操作 K 後の数のそれと一致するとき，$D_{(n)}$ は性質 K_n を満たすといい，さらに，$D_{(n)}$ と $D_{(n)}$ の操作 K 後の数が等しいとき $D_{(n)}$ は性質 $\overline{K}_n$ を満たすということにする。

以降，$495=(4,\ 9,\ 5)_{10}$ のように各位がわかるように表示することにする。

(2)　3 桁の n 進数において，操作 K 後の数の n の位の数字および n^2 の位の数字と一の位の数字の関係を n を用いて表しなさい。

(3)　性質 $\overline{K}_{10}$ を満たす 3 桁の数は，(1)(あ)の解答最後の数のみであることを示しなさい。

(4)　性質 $\overline{K}_n$ を満たす 3 桁の n 進数が存在するための n の条件を示し，その数を n を用いて表しなさい。

(5)　$n>2$ とする。(4)の条件のとき，各位の数字が全て同じでない 3 桁の n 進数は操作 K を最大 $\dfrac{n}{2}+1$ 回繰り返すことで，性質 $\overline{K}_n$ を満たす数にたどり着くことを示しなさい。

(6)　$n>3$ とする。3 種類の数字をそれぞれ d 個ずつ使ってできる $3d$ 桁の数が K_n を満たす条件は，n が(4)の条件を満たし，かつ，3 つの数字が(4)の各位の 3 つの数字であることを示しなさい。