問題 4

x の関数 $f(x)$ に対して，$xt-f(t)$ を $f^{[x]}(t)$ で表す。すなわち，$f^{[x]}(t)=xt-f(t)$ である。また，x を定数とみた t の関数 $f^{[x]}(t)$ の最大値が存在するとき，その最大値を $f^{*}(x)$ で表す。

例えば，$f(x)=x^2+2x$ のときは

$$f^{[4]}(t)=4t-f(t)=4t-(t^2+2t)=-(t-1)^2+1 \text{ より，} \quad f^{*}(x)=4$$

となり

$$f^{[x]}(t)=xt-f(t)=xt-(t^2+2t)=-\left(t-\frac{x-2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}x^2-x+1 \text{ より，} \quad f^{*}(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$$

となる。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$ のとき，$f^{*}(x)$ を求めなさい。

(2) x^2 の係数が正である 2 次関数 $f(x)$ に対して，$f^{*}(x)$ は存在し，関数 $f^{*}(x)$ も x^2 の係数が正である 2 次関数であることを示しなさい。

x の関数 $f(x)$ から作った関数 $f^{*}(x)$ に対して，t の関数 $f^{*[x]}(t)$ $(=xt-f^{*}(t))$ の最大値が存在するとき，その最大値を $f^{**}(x)$ で表す。

このとき，(3)，(4)に答えなさい。

(3) (2)からわかるように，x^2 の係数が正である 2 次関数 $f(x)$ から作った $f^{*}(x)$ は x^2 の係数が正である 2 次関数となるから，$f^{**}(x)$ は再び x^2 の係数が正である 2 次関数となる。

この 2 次関数 $f^{**}(x)$ はもとの 2 次関数 $f(x)$ と一致することを示しなさい。

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geqq 0) \\ x^2-2x & (x<0) \end{cases}$ のとき，$f^{*}(x)$ と $f^{**}(x)$ を求めて，2 つの関数 $f^{**}(x)$ と $f(x)$ が一致するかどうか調べなさい。