問題４

お詫び

「問題」及び「解答と解説」に誤りがありました。

問題文の４行目で，「$f^{[4]}(t)=4t-f(t)=4t-(t^2+2t)=-(t-1)^2+1$ より，　$f^*(4)=1$」とすべきところが，「$f^{[4]}(t)=4t-f(t)=4t-(t^2+2t)=-(t-1)^2+1$ より，　$f^*(x)=4$」となっていました。お詫びして訂正いたします。　　　　　　　　　　　　　　　　（数学コンテスト事務局）

配点

(1)　５点　　(2)　10 点　　(3)　10 点　　(4)　15 点

講評

問題４で満点をとったのは，北嶺高校の西田耕平くん１名です。(3)は直接計算している答案がほとんどで，解答例のように解いている人は９名でした。受験者の半分以上の人が(1)，(2)，(3)を正解していたのですが，(3)まで順調に解けた人でも(4)は勘違いしている人が多かったように思います。(4)では，t の関数 $f^{[x]}(t)$ は次のような関数です。

$$f^{[x]}(t)=\begin{cases} xt-t^2 & (t\geqq 0) \\ xt-(t^2-t) & (t<0) \end{cases}$$

この関数 $f^{[x]}(t)$ の最大値を考えて $f^*(x)$ を求めなければならないのですが，$f^{[x]}(t)$ のグラフの全体を捉えないで（グラフの一部分だけを考えて），$f^*(x)$ を求めようとした答案が多く，

$$f^*(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^2 & (x\geqq 0) \\ \dfrac{1}{4}x^2+x+1 & (x<0) \end{cases}$$

のように答えた人がかなりいました。このように間違えてしまった人は，解答例を見てよく考え，勘違いしている部分を点検してください。

問題４は計算ばかりで，面白い問題ではなかったかもしれませんが，

『いつでも $f^{**}(x)=f(x)$ が成り立つのか？』，

『どのようなときに $f^{**}(x)=f(x)$ が成り立つのか？』

ということが気になったのではないでしょうか。これについては，次のことが言えます：

関数 $f(x)$ は下に凸で，t の関数 $f^{[x]}(t)=xt-f(t)$ の最大値 $f^*(x)$ が存在し，かつ t の関数 $f^{*[x]}(t)=xt-f^*(t)$ の最大値も存在するとき，$f^{**}(x)=f(x)$ が成り立つ。

【証明】（ $f(x)$ が微分可能な場合だけ証明する。）

(ｉ)　はじめに $f^{**}(x)\leqq f(x)$ を示す。

$f^*(x)$ の定義から，

$$xt-f(t)\leqq f^*(x)$$

が任意の実数 x，t について成り立つ。この式の x と t を入れかえると，

$$xt-f(x)\leqq f^*(t)$$

となる。したがって，

$$xt-f^*(t)\leqq f(x) \qquad \cdots\cdots①$$

が任意の実数 x，t について成り立つ。①において x を固定すると $f(x)$ は定数だから，①の左辺の t を動かして最大値をとると，

$$f^{**}(x) \leqq f(x)$$

がわかる。

（ⅱ） 次に $f^{**}(x) \geqq f(x)$ を示す。

任意の実数 x_0 をとり固定する。$f^{**}(x_0) \geqq f(x_0)$ を示せばよい。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_0,\ f(x_0))$ における接線を l とする。l の方程式は，

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

である。関数 $f(x)$ は下に凸だから，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ f(x))$ は直線 l の下側にはない。

よって，

$$f(x) \geqq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

が成り立つ。この式を変形することにより，

$$x_0 f'(x_0)-f(x_0) \geqq f'(x_0)x-f(x) \qquad \left(=f^{[f'(x_0)]}(x)\right)$$

が任意の実数 x について成り立つことがわかる。上の式の右辺の x を動かしたときの最大値を考えることにより，

$$x_0 f'(x_0)-f(x_0) \geqq f^{*}(f'(x_0))$$

がわかるから，

$$f^{**}(x_0) \geqq x_0 f'(x_0)-f^{*}(f'(x_0)) \geqq f(x_0)$$

ゆえに

$$f^{**}(x_0) \geqq f(x_0)$$

実数 x_0 は任意であったから，$f^{**}(x) \geqq f(x)$ が示された。

（ⅰ），（ⅱ）より，$f^{**}(x)=f(x)$ が成り立つ。　（証明おわり）

数学Ⅲの学習が終わっている人は，$f(x)=x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$ のときの $f^{*}(x)$ や $f^{**}(x)$ を求めてみましょう。$f^{*}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$f^{**}(x)=f(x)$ となるはずです。いろいろな関数で試してみると，よい計算練習になると思います。

（北海道札幌国際情報高等学校　和田文興）